

The Grothendieckian Approach: Between Unity, Expression and Form

Mateo CARMONA
Centre d'Études Grothendieckiennes (CSG),
Istituto Grothendieck

« Les mathématiques comme expérience artistique »
IHP, 2025

« La mer était étale, mais le reflux
commençait à se faire sentir. »

V. Hugo, Les Travailleurs de la mer

Form and structure

Grothendieck's contributions are remarkable not only for its breadth, ranging from the proof of highly non-trivial results, to the invention of novel concepts, to the creation of entire new theories, but for the coherence of vision that guided it all. Underlying these achievements is a distinctive approach centered on a masterful and creative use of language. He was always searching for more flexible concepts, for subtler points of view that could act as seeds for new unifying principles. As he himself puts it:

« Tout point de vue amène à développer un langage qui l'exprime et qui lui est propre. Avoir plusieurs « yeux » ou plusieurs « points de vue » pour appréhender une situation, revient aussi (en mathématique tout au moins) à disposer de plusieurs langages différents pour la cerner. » [1]

This method is closely linked to the central role of abstraction in the structural thinking. In general, a structure abstracts away the substance of the objects involved and instead emphasizes the form of their relationships. This abstract approach has, from the beginning, been tied to our ability to denote and express things. Grothendieck writes:

*« C'est une banalité sûrement, mais qu'on a tendance à oublier, que la pensée est inséparable du langage qui l'exprime et lui donne forme, et que le langage est déjà abstraction. Penser, c'est exprimer par un langage, et qui dit « langage », dit « abstraction ». **Créer le langage, c'est ni plus ni moins qu'« abstraire ».** » [1]*

*« S'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni « le nombre », ni « la grandeur », mais toujours **la forme**. Et parmi les mille et un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est **la structure** cachée dans les choses mathématiques.*

*La structure d'une chose n'est nullement une chose que nous puissions « inventer ». Nous pouvons seulement la mettre à jour patiemment, humblement en faire connaissance, la « **découvrir** ». S'il y a inventivité dans ce travail, et s'il nous arrive de faire œuvre de forgeron ou d'infatigable bâtisseur, ce n'est nullement pour « façonner », ou pour « bâtir », des « structures ». Celles-ci ne nous ont nullement attendues pour être, et pour être exactement ce qu'elles sont ! [...]*

[...] Mais c'est pour **exprimer**, le plus fidèlement que nous le pouvons, ces choses que nous sommes en train de découvrir et de sonder, et cette structure réticente à se livrer, que nous essayons à tâtons, et par un langage encore balbutiant peut-être, à cerner. Ainsi sommes-nous amenés à constamment « **inventer** » le langage apte à exprimer de plus en plus finement la structure intime de la chose mathématique, et à « construire » à l'aide de ce langage, au fur et à mesure et de toutes pièces, les « théories » qui sont censées rendre compte de ce qui a été appréhendé et vu. Il y a là un mouvement de va-et-vient continu, ininterrompu, entre l'**appréhension** des choses, et l'**expression** de ce qui est appréhendé, par un langage qui s'affine et se re-crée au fil du travail, sous la constante pression du besoin immédiat. » [1]

The general: the case of the 1950s and 1960s

From the very beginning, Grothendieck placed a strong emphasis on generality, an integral part of certain attitudes. In fact, one feature common to nearly all of his contributions, namely schemes, were already “in the air” at the time. His decisive contribution was to overcome a psychological barrier through a simplification, by generalizing existing approaches.

His appropriation of the languages of the time, as well as his interest in certain problems, led him to formulate ideas in relation to a principle of relative variation.

As was often the case with Grothendieck, this also meant an aesthetical standpoint, as he would omnipresently use the notation in his lectures:

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ S \end{array}$$

After the arrow, he would move to the diagram:

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

$$X' = (X \times_S S' \xrightarrow{f(S')} S')$$

and study the following type of questions:

- ▶ knowing the properties of X , what can be deduced about X' (this is the theory of 'montée'),
- ▶ and conversely, knowing the properties of X' , what can be deduced about X (this is the theory of 'descent').

Later, the notion of Grothendieck topology would allow the transposition of the topological intuition into descent theory, in the particular case in which the base change becomes a 'localization'.

Another example of this generality was a renewed study of points. The rich and complex tradition of geometry has debated its definition for centuries. One common ancient view is that a point is a monad with position. A monad has no internal structure—nor does a point.

With the introduction of topological spaces, points are entirely absent from the topological theorization of space. It is the structure generated by the open sets—that is, subsets of the underlying set—that generates the space, not its points. A topological space is a set of points provided with a topological structure.

With the notion of topos, Grothendieck reintroduces points into the topological discourse—granting them not only renewed relational presence but also a rich internal structure and context dependency.

To begin with, consider the punctual topos (the category of sets), denoted by P . Let E be a topos. A point of E is defined as any morphism of topos

$$p : P \rightarrow E,$$

In this sense, points can be said that are now "outside the space", rather than contained within it.

In classical theory, points are intrinsically indistinguishable from one another; they differ only in position. In other words, there exists an archetypal point of which all others are mere instances or representations. With Grothendieck, however, the nature of a point depends on the chosen topos. Interestingly enough, in this framework it is possible to construct nontrivial spaces that has no points!

The particular: the case of the 1970s

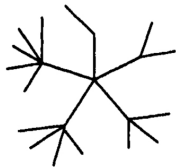
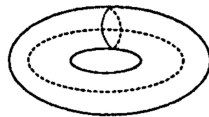
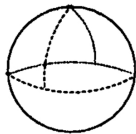
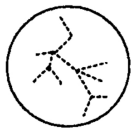
« Alors que, dans mes recherches d'avant 1970, mon attention était systématiquement dirigée vers des objets de généralité maximale, dans le but de dégager un langage d'ensemble adéquat pour le monde de la géométrie algébrique — et que je ne m'attardais sur les courbes algébriques que dans la stricte mesure où cela s'avérait indispensable (notamment en cohomologie étale), afin de développer des techniques et des énoncés « passe-partout », valables en toute dimension et en tout lieu (c'est-à-dire, sur tout schéma de base, voire tout topos annelé...) —, me voilà donc ramené, par le truchement d'objets si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant, aux commencements mêmes de la géométrie algébrique, tels que les connaissent Riemann et ses émules ! » [5]

In the 1970s, Grothendieck underwent a pedagogical turn in his life. This shift led him to broaden his interest toward mathematical objects that were more accessible to students with moderate backgrounds. Two-dimensional shapes turned out to offer such a common ground. It was the study of the combinatorial aspects of these surfaces that increasingly captured Grothendieck's attention. The realization that these seemingly simple objects were deeply connected to algebraic geometry came as something of a revelation, sparking new directions in his research-this time with an accent on the particular. One of these striking examples was:

« Dessins d'Enfants »

A "dessin d'enfant" can be visualized as a finite set of points on the surface, connected by a finite set of edges, in such a way that the edges and vertices form a certain connected set which cuts the surface into open cells, like trees on the sphere or even regular solids. They were used to make a conjectural description of the absolute Galois group $\text{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$, an object of high interest for mathematicians of several fields.

[11]



Example 4: The calculation for the following dessin is quite complicated: it was performed by the number theory group in Bordeaux.



All dessins having identical valency lists to this dessin are in its Galois orbit, which has order 10. We give here a degree 10 polynomial whose roots describe the fields of definition of the orbit:

$$Q(z) = z^{10} + 1482z^9 + 1689948z^8 + 890151444z^7 + 363946250304z^6 + 2267330869440z^5 - 1729356759663624z^4 + 75590803665798876z^3 -$$

$$1899051199966144224z^2 + 7231520112142277952z + 634545639784165885776.$$

Multidisciplinary studies

It was around this time that a Japanese monk from a Buddhist community arrived unannounced at his home in Villecun. This encounter marked the beginning of new spiritual quests—though they were not immediately recognized as such. It was only within this new framework that a new passion began to emerge in his life. He writes:

« Le jour où est apparue dans ma vie la troisième grande passion - une certaine nuit du mois d'octobre 1976 - s'est évanouie la grande peur d'apprendre. C'est la peur aussi de la réalité toute bête, des humbles vérités concernant ma personne avant tout, ou des personnes qui me sont chères. [...] C'est dans cette même nuit, je crois, que j'ai compris que désir de connaître et puissance de connaître et de découvrir sont une seule et même chose. » [1]

The new style: examples from the 1980s

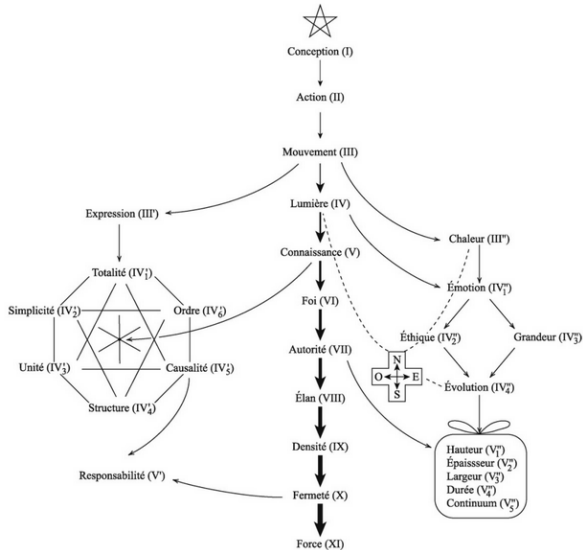
« Cette « exclusion » mutuelle de ces deux passions m'apparaît d'ailleurs à présent moins draconienne, qu'il y a encore deux ans. Dans À la poursuite des champs, la réflexion mathématique laisse place parfois, ou même devient l'occasion, d'une réflexion tant soit peu personnelle, où ma personne, en tant qu'être doué de sensibilité et de sentiments, d'une curiosité (pas seulement mathématique) et d'une destinée, n'est plus entièrement absente. Et en sens inverse, dans cette réflexion sur moi-même qu'est Récoltes et semailles, cette réflexion même me remet en contact avec d'anciennes amours mathématiques, et devient l'occasion ici et là d'amorces de réflexion mathématique.

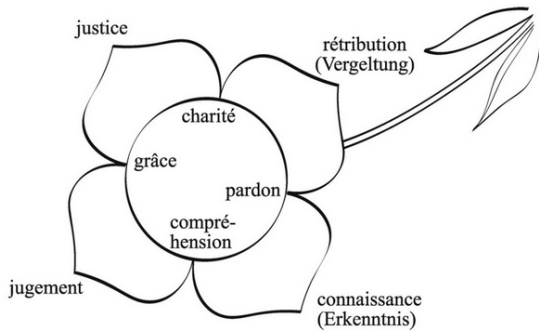
Il est possible que ces possibilités de coexistence, voire de symbiose, entre ces deux expressions différentes de la pulsion de connaissance en moi, doivent, par la nature même des choses, rester assez limitées. Mais il était clair en tout cas pour moi, lors de la réflexion de l'an dernier (et même, déjà depuis la longue méditation poursuivie trois ans avant), que ces deux passions ne sont nullement de nature antagoniste, ni même d'essence différente. » [1]

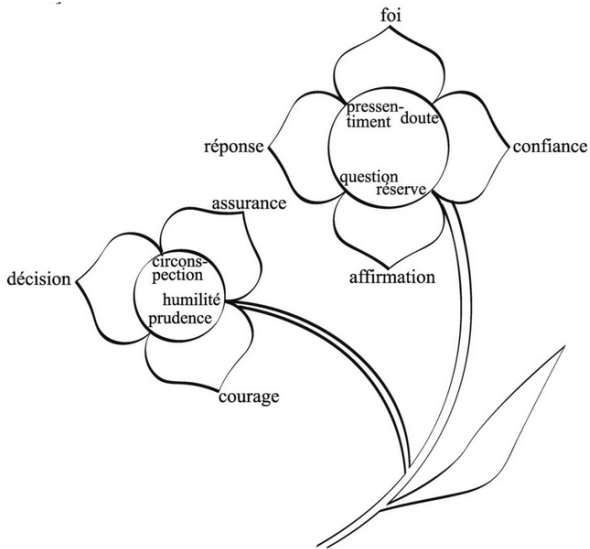
While he never leave mathematics, Grothendieck went also on to combine them—particularly his use of diagrams and the ordering structures of polyhedra—with his meditations on the creative process and methods of learning, for instance, in the unclassifiable *Récoltes et Semailles* [1]. He writes:

« je pourrais déposer un brevet sur l'invention d'une nouvelle forme poétique, savoir le poème dit “non linéaire”, ou “diagrammatique” »:

Diagrammatic poetry [1]:







« Le travail ici était vraiment très proche du travail mathématique bien familier, quand on s'efforce de saisir graphiquement, de façon aussi frappante que possible, un ensemble plus ou moins complexe de relations (données par exemple par des « applications », figurées par des flèches) entre un certain nombre d'« ensembles » ou de « catégories », figurant comme « sommets » du « diagramme » qu'on s'efforce de construire. Là aussi, des exigences de nature essentiellement esthétiques, de symétrie et de transparence structurale notamment, conduisent fréquemment à introduire (et au besoin donc, à découvrir voire même à inventer) des « flèches » ou liens auxquels on n'avait pas songé au départ, et parfois même des nouveaux « sommets ». » [1]

« Vers une géométrie des formes » [3]

« I have been very intensely busy for about a month now, with writing down some altogether different foundations of 'topology', starting with the 'geometrical objects' or 'figures', rather than with a set of 'points' and some kind of notion of 'limit' or (equivalently) 'neighbourhoods'. Like the language of topoi (and unlike the so-called 'moderate space' theory foreshadowed in the Esquisse, still waiting for someone to take hold of the work in store ...), it is a kind of topology 'without points' — a direct approach to 'shape'. I do hope the language I have started developing will be appropriate for dealing with finite spaces, which come off very poorly in 'general topology' (even when working with non-Hausdorff spaces) » [10]

$$\begin{array}{ccccc} \emptyset \subset \overline{F} & \xrightarrow{\sim} & F' & \xrightarrow{\sim} & \overline{F} & \xrightarrow{\sim} & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{G} & \xrightarrow{\sim} & G' & \xrightarrow{\sim} & \overline{G} & \xrightarrow{\sim} & G \end{array}$$

bon u.

$$\emptyset \subset \overline{G}$$

...

Il faut la montrer. $\overline{F}$ est une $\mathbb{Q}$ -alg.
 $\overline{G}$. Mais $\overline{F}$ est une $\mathbb{Q}$ -alg. bon u.

(C'est une alg. commutative - cf. 1.)

$\overline{F} \subset \tilde{F} \xrightarrow{\sim} \overline{F}$, donc $X \in \tilde{F}$ et $X \notin \overline{F}$
 ~~$X \in \overline{F}$~~ $X \in \tilde{F}$

$$\begin{array}{ccccc} \overline{F} & \subset & \tilde{F} & \xrightarrow{\sim} & \overline{F} & \xrightarrow{\sim} & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{G} & \xrightarrow{\sim} & G' & \xrightarrow{\sim} & \overline{G} & \xrightarrow{\sim} & G \end{array}$$

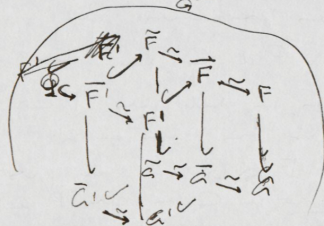
idem

$\tilde{F}$ est

$$\emptyset \subset \overline{F} \cap \tilde{G}$$

ou !

bon u.



On a par définition de $\ll$

$$G \leq \bar{F} \ll F$$

Conséquence d'un
subl. $\bar{F}$ de F

et on va appliquer C6

$$G \leq \bar{F} \ll F$$

$$\begin{matrix} \vee & \vee & \vee \\ G' & \leq & \bar{F}' & \ll & F' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ G \cap \bar{F}' \end{matrix}$$

~~Soit~~ Pr. --- que $G' \cap \bar{F}' \cap F' \ll$

On a par d'itération $\ll$

$$F \leq G' \leq G$$

$$\wedge$$

$$F'$$

$$\ll$$

$$F$$

on conclut par $C \neq$

$$F \leq G' \leq G$$

$$\wedge$$

$$H$$

$$\leq$$

$$\wedge$$

$$F'$$

$$\ll$$

$$F$$

Spirituality: examples from the 1990s

A new epoch in Grothendieck's life began with a meditation on his own spiritual path, as documented in "La Clef des Songes" [6]. A decisive step came through his parallel investigations—on one hand, of spiritual communities, and on the other, of spiritual figures—culminating in the concluding notes titled the "Mutants." While M. Légaut played an influential role, it was above all Chardin and Steiner—through their visions of a new kind of science—that mostly shaped Grothendieck's orientation in the years that followed. He said about Steiner:

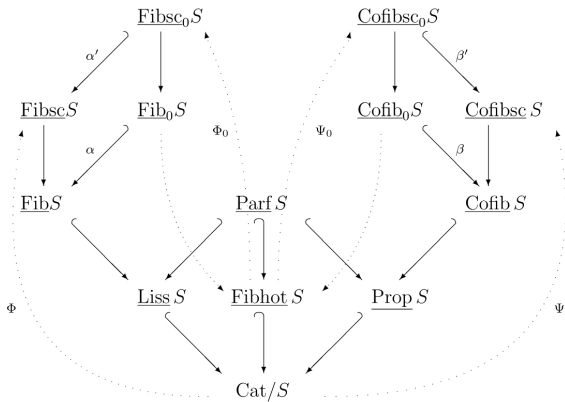
« Il s'est proposé de promouvoir une "science spirituelle" (Geisteswissenschaft) qui embrasserait l'ensemble des sciences traditionnelles mais dans un esprit renouvelé, en donnant place première à la réalité spirituelle ou plus exactement, extrasensorielle, qui devra les éclairer et les orienter. » [6]

Equally significant was the idea of a direct communication with God, as well as a growing sense of urgency about the coming of a New Age—both of which were influenced in part by his encounter with E. Caddy, who left a lasting mark on him.

Around this time, Grothendieck embarked on a vast exploration around this “new science,” titled “*Réflexions sur la Vie et le Cosmos*” [4], encompassing comparative religion, the nature of the psyche, esotericism, physical phenomena, and much more. Though he largely departed from tradition, he made extensive use of his own methods and languages. Like an ancient scientist, or one of a very new kind, he was not merely trying to describe the world, but finding its inner harmony.

« Dérivateurs » [9]

But before we move into that, let's note that at that time Grothendieck got a renewed interest in the publication of Pursuing Stacks [8], and he once again turned into homotopy theory. This time, he embarked on an ambitious project to lay proper foundations for the theory of derivators [9], a notion that had already appeared in Pursuing Stacks. His aim was to develop a general homological-homotopical formalism, ultimately a formalism of the variance of “coefficients,” applicable to general arrows in the category of categories $\mathbf{Cat}$.



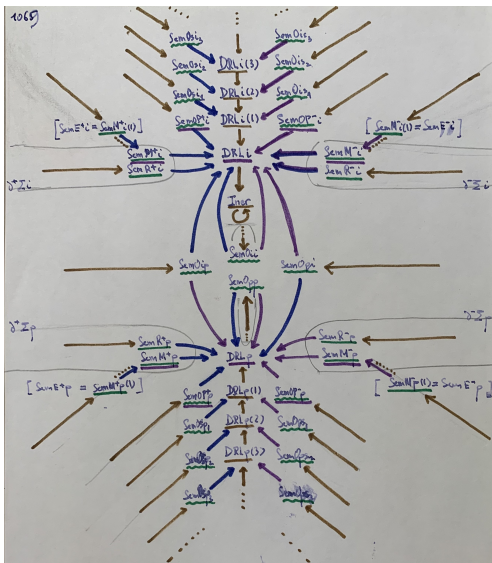
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{HOT}_W(S) \approx (\text{Cat}/S)(W_S^{\text{d}})^{-1} & & \\
 & \nearrow i & & \nearrow \text{car } W_S = W_S^{\text{d}} \text{ sur } \underline{\text{Parf}} & \\
 \text{HOT}_W^{\text{lc}}(S) \approx (\text{Cat}/S)W_S^{-1} & \xrightarrow{C} & (\underline{\text{Parf}} S)W_S^{-1} & & \\
 & \searrow j & & \searrow \text{car } W_S = W_S^{\text{g}} \text{ sur } \underline{\text{Parf}} & \\
 & & \text{HOT}_W^o(S) \approx (\text{Cat}/S)(W_S^{\text{g}})^{-1}. & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 p_! f'_! q^* G & \longrightarrow & f_!(G) \\
 \downarrow \wr \text{ transitivité} & & \nearrow \\
 (p f')_! q^* G & & \\
 \downarrow \gamma & & \text{car } q_! q^* G \longrightarrow G \\
 (f q)_! q^* G & & \\
 \downarrow \wr \text{ transitivité} & & \\
 f_!(q_! q^*) G. & &
 \end{array}$$

« Psychologie (combinatoire) » [4]

As part of *Réflexions sur la Vie et le Cosmos*, Grothendieck wrote a text entitled *Structures de la Psyché*, in which he undertook a systematic study of psychic energy—its exchanges and the various actors involved, both those limited in time and energy and those considered infinite. The entire theory is grounded in the notion of “fluences,” a type of directed graph through which one can develop a structural theory of trees, forests, functors, and diagrams—all of which represent manifold interactions between actors operating on various levels of energy.

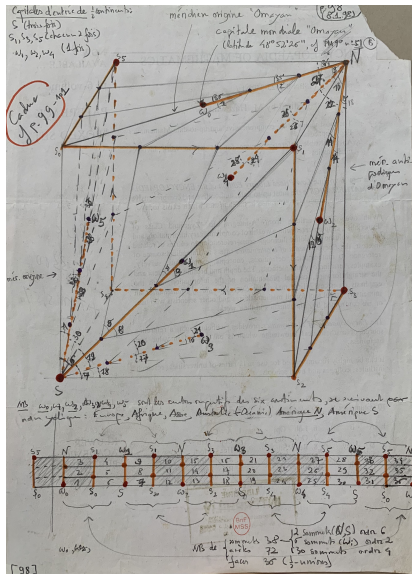
1068



(III)

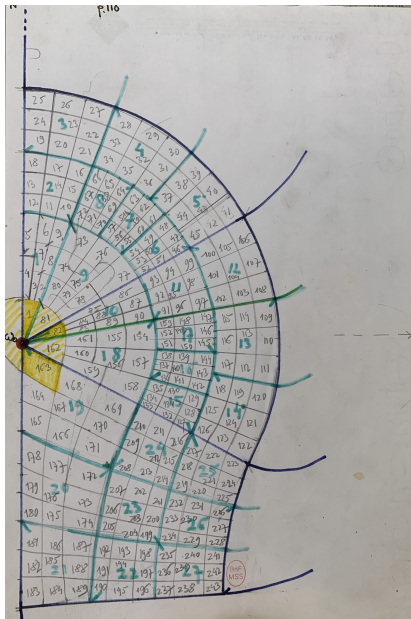
Graphes une quatri
 M_{1855}
 (transition trace)

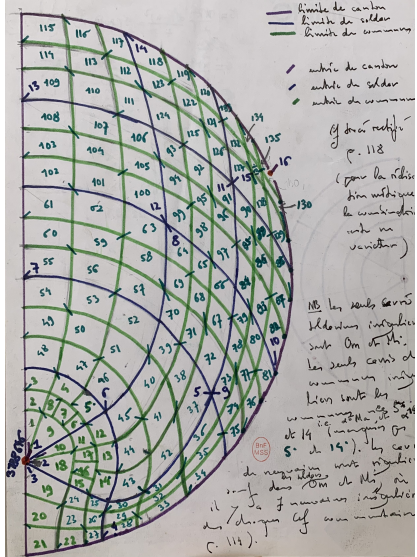
« Gribouillis » cosmiques [4]:



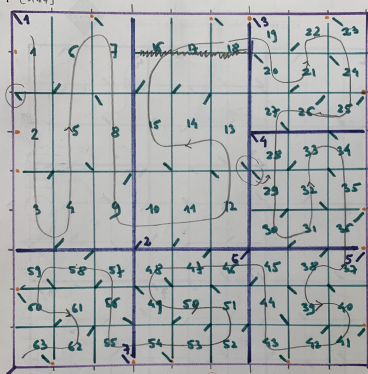
Les $\bigcirc$ entourent les noms géographiques
des 18 = 6 x 3 unions (ce sont des
blocs géographiques, non des sexes...)







144 [144]



Caution : 7 solders (de type II, II, I, II, I, II, III)
dans déplacement

Conclusion

*« Rechercher le commun dans le disparate, ou la parenté dans le dissemblable, c'est aussi chercher le « **général** » à travers le particulier. À un moment où la mode mathématique est au mépris de la généralité (assimilée à des « généralités » gratuites, voire à des bombinages), je puis constater que la force principale manifeste à travers toute mon œuvre de mathématicien a bien été la quête du « général ». Il est vrai que je préfère mettre l'accent sur l'« unité », plutôt que sur la « généralité ». Mais ce sont là pour moi deux aspects d'une seule et même quête. L'unité en représente l'aspect profond, et la généralité, l'aspect superficiel. » [1]*

Grothendieck stands as a powerful heir to a long tradition of structural thinking, which he not only inherited but profoundly enriched. At the heart of this enrichment lies a vision in which thinking, abstraction, and language form a single, unified movement toward understanding.

His life and work are not only inseparable, but are also his ideas, subjects and methods themselves from one another, as well as the breath that animates them. In this way, through its own perfection and limitations, each part carries within itself the revelation of the whole: not in the details, but in its unity and spirit.

It is the Grothendieckian approach!

References

1. Récoltes et Semailles I, II. Éditions Gallimard, 2022, 439 Paris.
2. EGA I : Le langage des schémas. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 4 (1960), pp. 5-228
3. Fonds Grothendieck, Université de Montpellier
4. Fonds Alexandre Grothendieck, BnF. "Réflexions sur la Vie et le Cosmos", œuvre manuscrite autographe, 1992 à 1999.
5. Esquisse d'un programme. Geometric Galois Actions I, Volume 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 5-48
6. La Clef des Songes ou Dialogue avec le Bon Dieu. Postface de Laurent Lafforgue, de l'Académie des sciences. Éditions du Sandre, 2024

7. SGA 4 : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas I, II, III. Lecture Notes in Mathematics, n 269 (1972), 270 (1972), and 305 (1973). Springer
8. Pursuing stacks I, Edited by Georges Maltsiniotis. Documents Mathématiques, 20. Paris: Société Mathématique de France (SMF). cx, 446 p. (2022)
9. Dérivateurs. Transcription by M. Kunzer and edition by M. Kunzer, J. Malgoire, and G. Maltsiniotis.
10. Letter to Yamashita, July 9th, 1986
11. The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants. London Math. Soc. Lecture Notes 200, Cambridge Univ. Press, 1994

Acknowledgements

Special thanks are due to Grothendieck's heirs, who granted us exclusive permission to disseminate certain images from the Fonds Alexandre Grothendieck at the BnF. This has allowed us to present a more complete picture of the unity in Grothendieck's work.