



Ars diagrammaticae. De la mathématique à l'esthétique et retour

Charles Alunni



11 Juillet 2025

IHP / Istituto Grothendieck

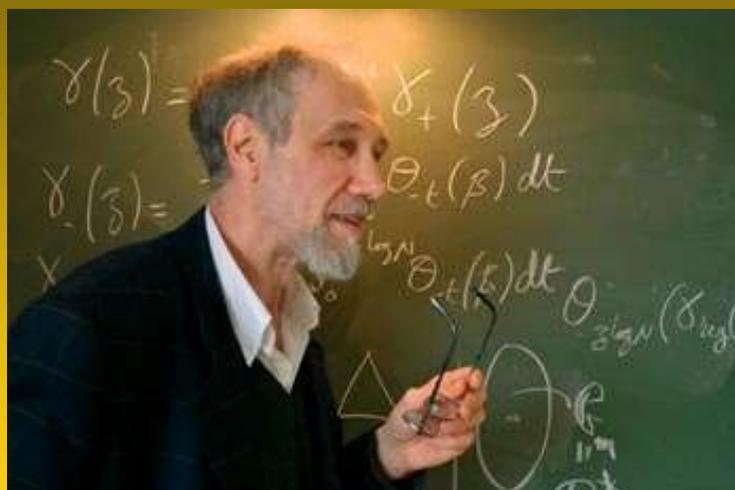
Plan

- 1. Le phénomène de compactification.**
- 2. Du diagramme comme preuve par l'image.**
- 3. Diagramme & métaphore.**
- 4. Structure articulée & dialectique du gramme.**
- 5. La désintrication des concepts d'image, de figure et de diagramme.**
- 6. Petite note sur la question de la « preuve » diagrammatique.**
- 7. D'un rapport certain à l'esthétique.**



« Parfois également, *une bonne notation entraîne un progrès considérable* en simplifiant la vérification et *en allégeant l'écriture*. Beaucoup de spécialistes des équations aux dérivées partielles seraient perdus sans les *notations abrégées* pour la différentiation, héritées de Leibniz : par exemple u_{ijk} est une abréviation pour $\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ — nul besoin d'insister sur le gain de temps et d'espace.

Cédric VILLANI, « *L'Écriture des mathématiciens* », Table ronde “Les écritures des mathématiciens et des physiciens”, avec Patrick Flandrin et Jean Dhombres, dans le cadre du colloque *Écritures : sur les traces de Jack Goody*, éd. Éric Guichard, Lyon, Enssib, « Papiers », 2012.



« Pour un mathématicien, comprendre une démonstration ce n'est pas *refaire* une à une les étapes ou les lignes qui la constituent, mais *trouver un geste qui comprime*, qui permette de *saisir d'un seul coup* l'ensemble de la démonstration »

Alain CONNES, Séminaire « Pensée des sciences », ENS, 2003.

The logo consists of the Latin phrase "Ars Gratia Artis" written in a white, elegant cursive script. The text is arranged in three lines: "Ars" on the top line, "Gratia" in the middle, and "Artis" on the bottom. The script is contained within a solid black square, which is itself centered within a white square frame.

Ars : latin signifiant « façon d'être » et « façon d'agir ». Apparenté au grec ἄρθρον (« articulation »). La racine *armus* a donné le latin *ritus* « compte », le grec *arithmos*, « nombre ». Ce sera aussi le sens de « talent ». Le mot a servi d'équivalent au grec *technè*. En français, à la fin du X^{ème} siècle, le mot prend le sens de « moyen, méthode, connaissance », puis celui de « ruse, artifice »

TABLE 1.1. Maxwell's Equations in the Course of History

The constants c , μ_0 , and ϵ_0 are set to 1, and modern notation is used for the components.

The Homogeneous Equation

Earliest Form

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\dot{B}_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\dot{B}_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\dot{B}_z$$

At the End of Last Century

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

At the Beginning of This Century

$$*F^{\beta\alpha}{}_{,\alpha} = 0$$

Mid-Twentieth Century

$$dF = 0$$

The Inhomogeneous Equation

Earliest Form

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = j_x + \dot{E}_x$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = j_y + \dot{E}_y$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = j_z + \dot{E}_z$$

At the End of Last Century

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

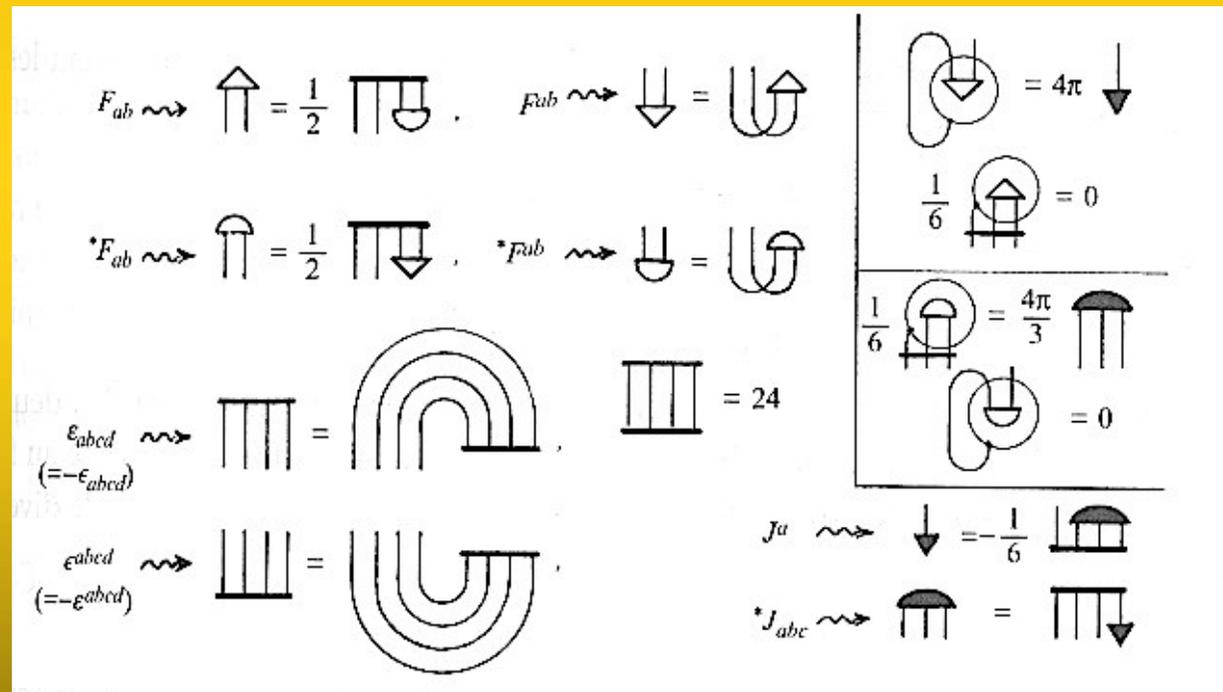
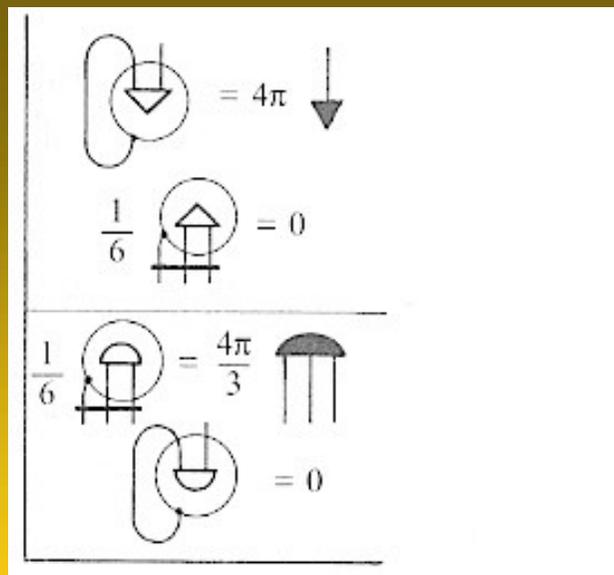
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$$

At the Beginning of This Century

$$F^{\beta\alpha}{}_{,\alpha} = j^\beta$$

Mid-Twentieth Century

$$\delta F = J$$



Équations de Maxwell
Version Sir Roger PENROSE

$$P_b^a \leftrightarrow \text{circle with dot}, \quad E^{ab} \leftrightarrow \text{rectangle}$$

$$\Delta(P_b^a) \leftrightarrow \Delta(\text{circle with dot}) = \text{circle with dot} \otimes \text{circle with dot}$$

So that

$$\Delta(\text{circle with dot}) \otimes \Delta(\text{circle with dot}) = \text{diagram with two circles and a rectangle}$$

$$= \text{diagram with two circles and a rectangle}$$

$$= \text{diagram with two circles and a rectangle}$$

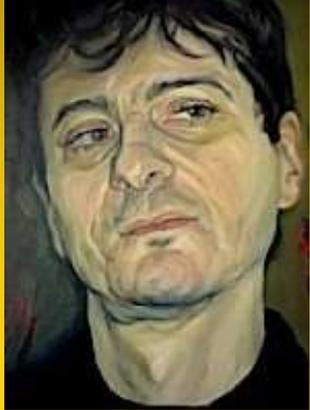
$$= \text{diagram with two circles and a rectangle} \otimes 1$$

$$= \text{rectangle} \otimes 1$$

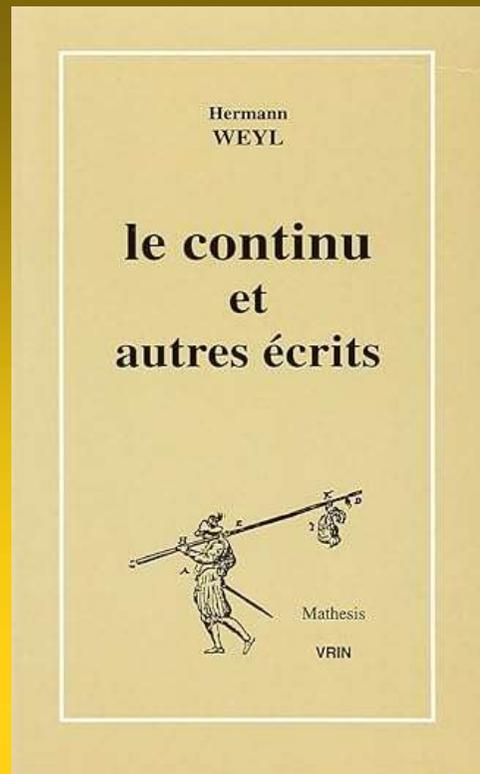
$$= \text{rectangle} (1 \otimes 1)$$

$$\equiv \text{rectangle} //$$

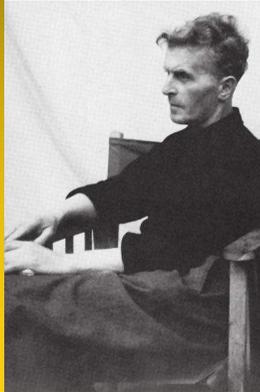
The tensor diagrams give a direct view of the repeated indices (via tied lines), laying bare the structure of this calculation. In particular, we see at once that if



Voir sur ce point, Charles Alunni, « De l'écriture de la mutation à la mutation de l'écriture : de Galileo Galilei et Leonardo da Vinci au "technogramme" », in *Les Mutations de l'écriture*, Paris, Publications de la Sorbonne, « LogiqueLangageSciencesPhilosophie », éd. François Nicolas, 2013.



Hermann WEYL, « Über den Symbolismus der Mathematik und mathematischen Physik », *Studium Generale*, 1953, 6, p. 219-228, in Hermann WEYL, *Le Continu et autres écrits*, Paris, Vrin, « Mathesis », 1994 [éd. Jean Largeault], p. 255.

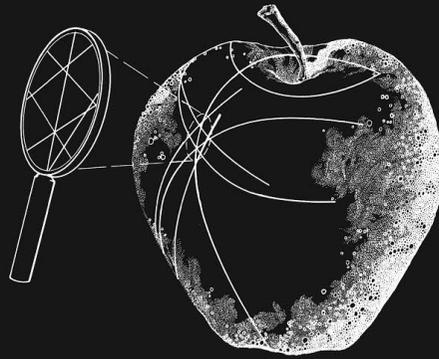


« La pensée est essentiellement l'activité d'opérer avec des signes. Cette activité est exercée par la main quand nous pensons en écrivant [...] *La pensée est quelque chose comme une activité de la main* »

Ludwig WITTGENSTEIN, *Le Cahier bleu et le Cahier brun*, Paris, Gallimard, 2004.

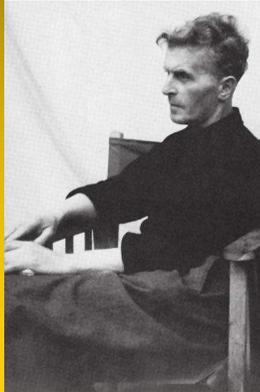
GRAVITATION

Charles W. MISNER Kip S. THORNE John Archibald WHEELER



WITH A NEW FOREWORD BY DAVID I. KAISER AND
A NEW PREFACE BY CHARLES W. MISNER AND KIP S. THORNE

John Archibald Wheeler, in Charles W. MISNER, Kip S THORNE, John Archibald WHEELER, *Gravitation*, San Francisco, W. H. Freeman, 1973,



« I think with my pen »

« Je pense en fait avec la plume. Car ma tête, bien souvent, ne sait rien de ce que ma main écrit »

Ludwig Wittgenstein, *Vermischte Bemerkungen* [*Remarques mêlées*, TER, 1990], Oxford, Basil Blackwell, 1977, p. 29.



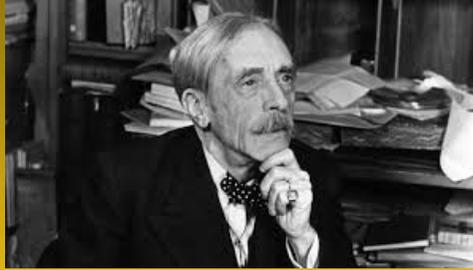
« J'ai donc ainsi en quelque sorte *propulsé une main par la pensée* et on serait tenté de dire que la pince ou le compas donnent *un point de vue à la main* »

Gilles CHÂTELET, *Les Enjeux du mobile, Mathématique, physique, philosophie*, « Des Travaux », Seuil, Paris, 1993, p. 221.



« Et si ce *disegno* ne commandait ni ne maîtrisait notre intellect, en particulier notre intellect pratique; si ce dernier ne commandait, c'est-à-dire ne dirigeait notre volonté, et si celle-ci ensuite ne commandait à nos forces <virtù > et à nos puissances inférieures, ainsi qu'aux parties du corps, **en particulier aux mains**, nous ne pourrions découvrir l'ordre et la façon d'opérer droitement en nous-mêmes. »

Federico ZUCCARO, *L'Idée des peintres, sculpteurs et architectes*, Turin, Disserolio, 1607, in P. Barocchi, vol. 2 [Trad. fr. C. Alunni], in J. Lichtenstein (dir.), Larousse, Paris, 1995.



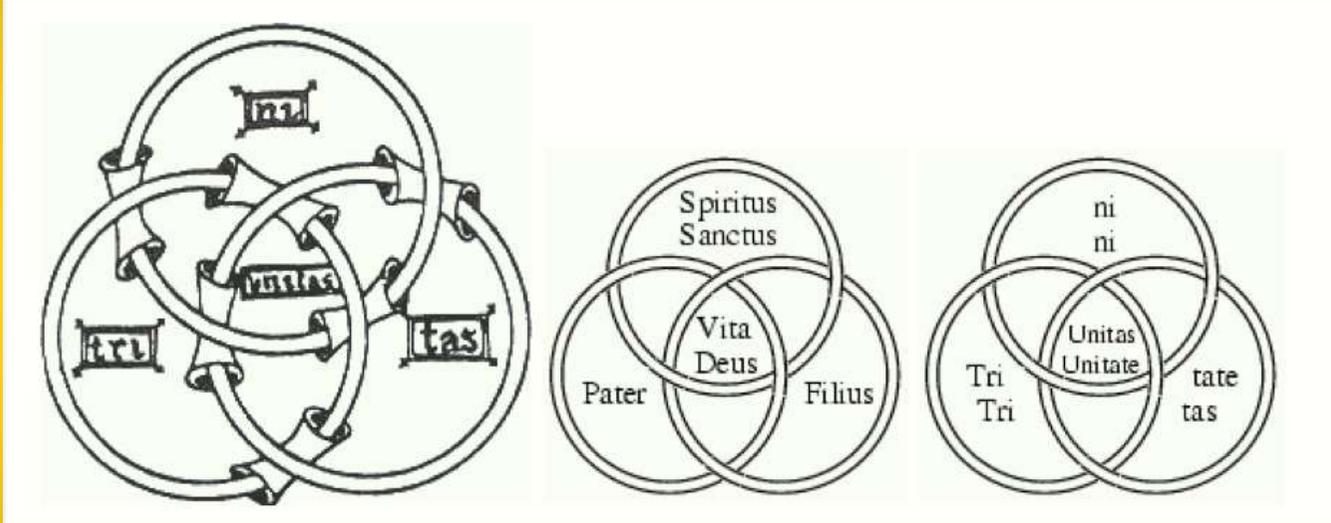
« Mes lectures – rares [...] surtout le passionnant *Électromagnétisme* du dernier grand théoricien (mort) Maxwell. Je dis *passionnant*. Un livre tout fait d'une métaphore originelle, initiale, puis uniquement les formules et *les diagrammes* – un *ornement extraordinaire* »,

Paul VALÉRY, novembre 1893, in *André Gide — Paul Valéry. Correspondance 1890-1942*, Paris, Gallimard, 1955, Édition Robert Mallet, p. 190.



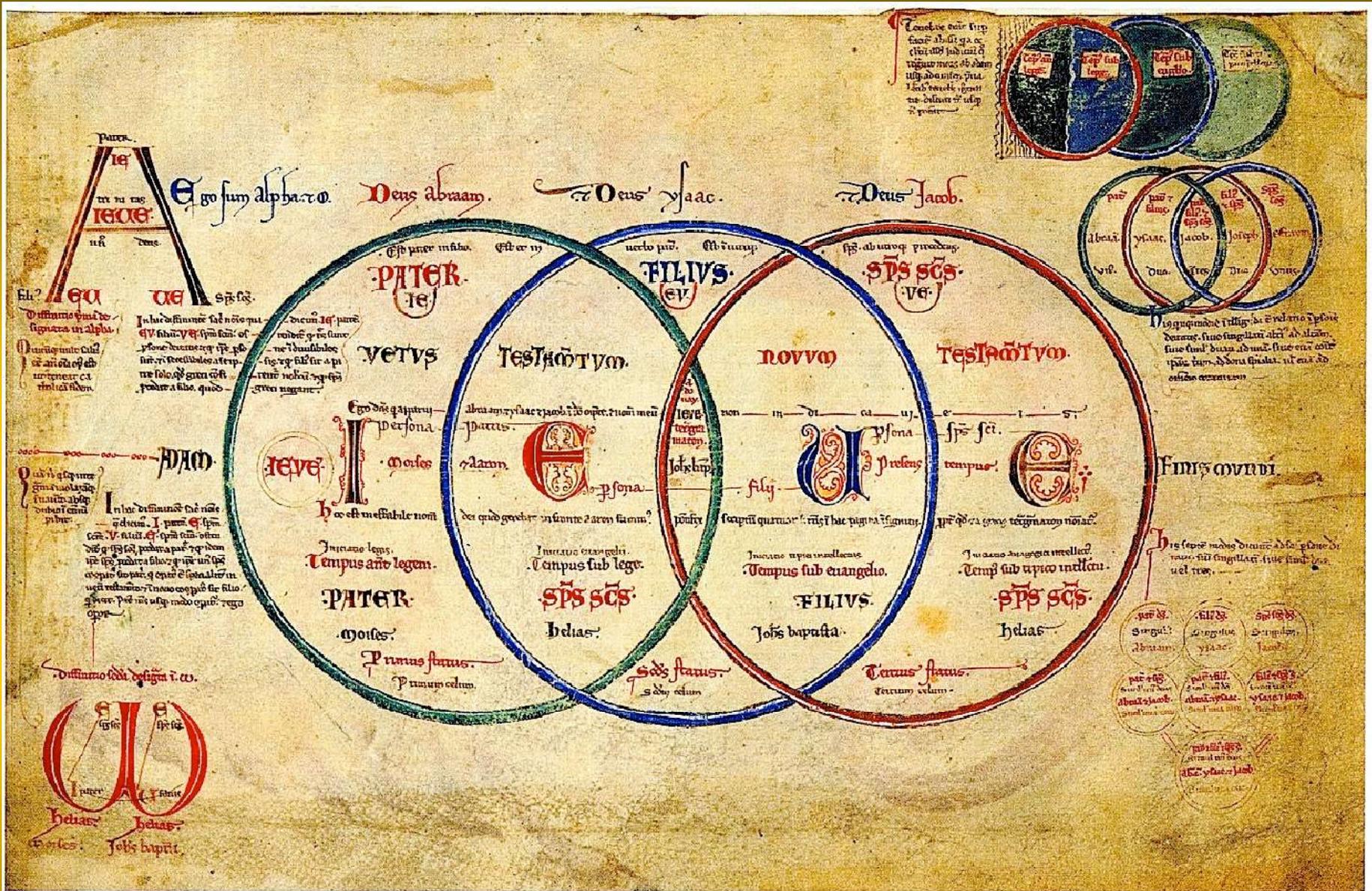
« Un diagramme peut immobiliser un geste, le mettre au repos, bien avant qu'il ne se blottisse dans un signe, et c'est pourquoi les géomètres ou les cosmologistes contemporains aiment les diagrammes et leur pouvoir d'évocation péremptoire. Ils saisissant les gestes au vol ; pour ceux qui savent être attentifs, *ce sont les sourires de l'être* »

Gilles CHÂTELET, *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*, « Des Travaux », Seuil, Paris, 1993.



Hugues de Saint-Victor

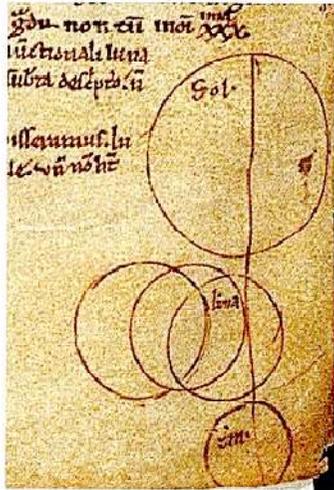
Vers 1160



AP 30

Drei-Kreise-Diagramm, Joachim von Fiore, Liber Figurarum; Oxford, CCC, MS 255A fol. 7^v.

Joachim de FLORE
 1130 ? - 1202



AP 28a

Drei-Kreise-Diagramm,

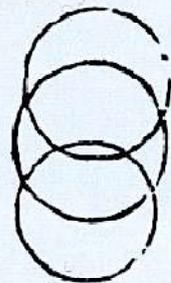
zu Wilhelm von Conches, *Philosophia mundi* II 23;
nach Johannes Herold, *D. Honorii Augustodunensis*
presbyteri libri septem (Basileae 1544) pag. 175.

AP 28b

Drei-Kreise-Diagramm, zu Wilhelm von
Conches, *Philosophia mundi* II 30; *Biblioteca*

Solari, Circulus
ri parte sui inter

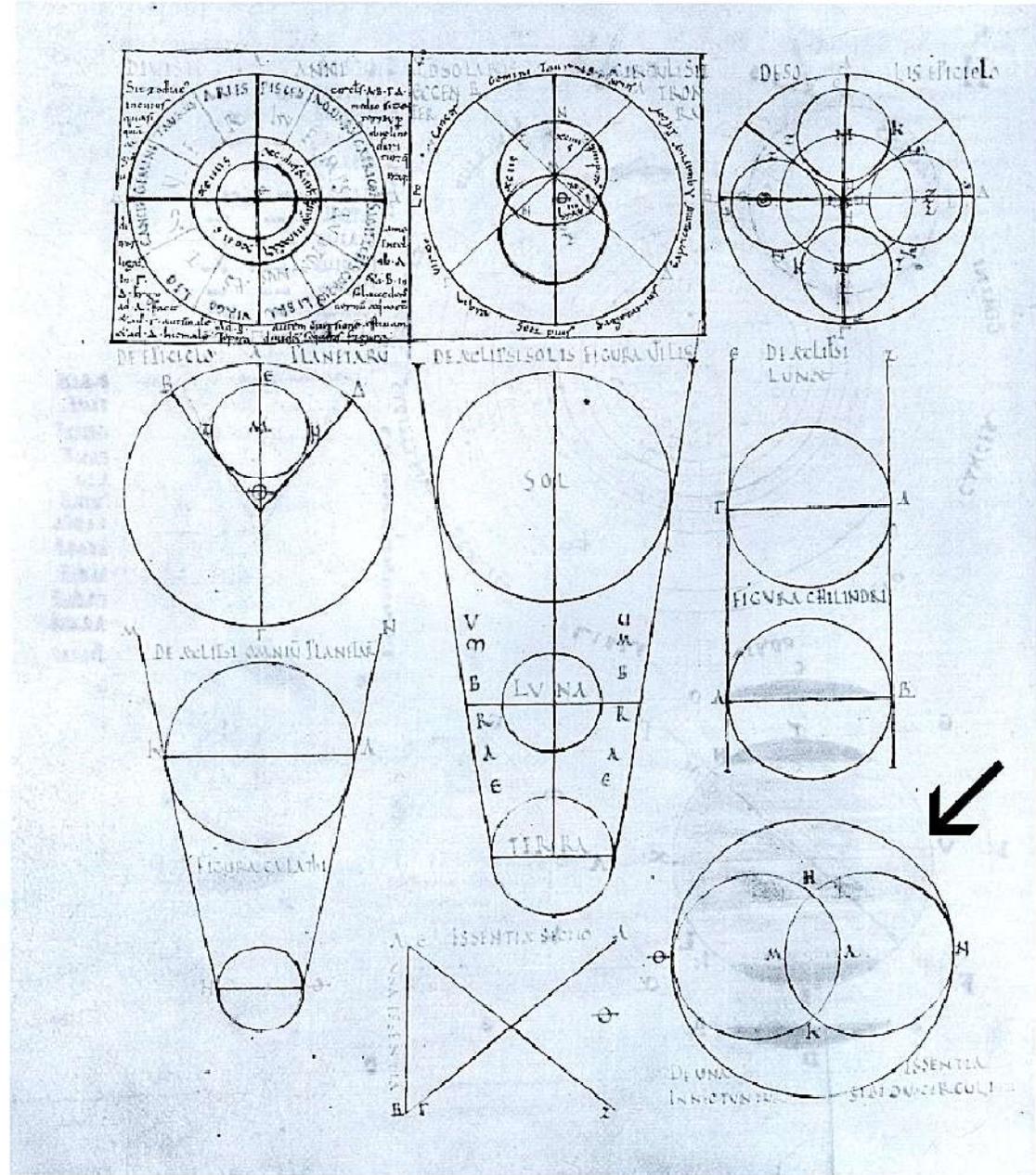
Apostolica Vaticana,
Vat. Reg. Lat. 72 fol. 96^v.



Venus.
Mercurius. Q
Sol. rijl

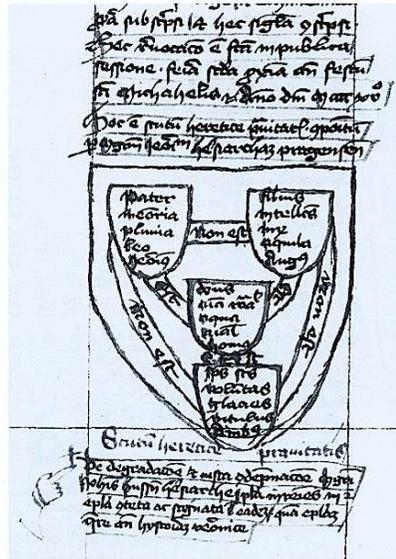
AP 29

Drei-Kreise-Diagramm;
nach dem Kommentar
des Calcidius zu
Timaeus, übernommen
von Abbo von Fleury;
Berlin, Staatsbibl.,
Phillipps 1833 fol. 36^v.

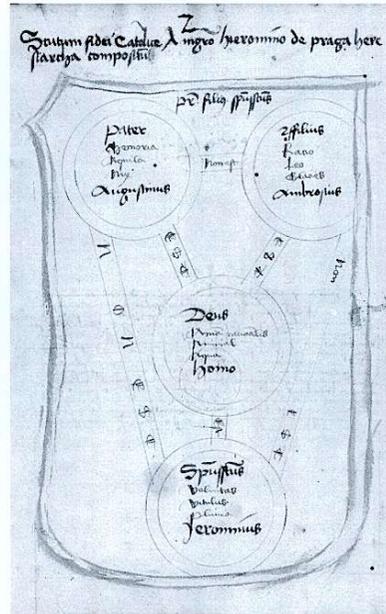


Joachim de FLORE

1130 ? - 1202

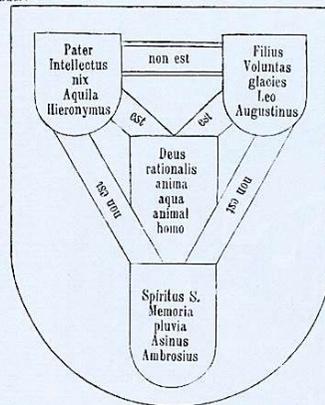


FS 20
Scutum heretice pravitatis; Biblioteca Apostolica Vaticana, Ottobon. Lat. 2087, fol. 241^{va}.



FS 21
 Hamburg, Staats- und Univ.-Bibl., Cod. hist. 31e, fol. 7^o.

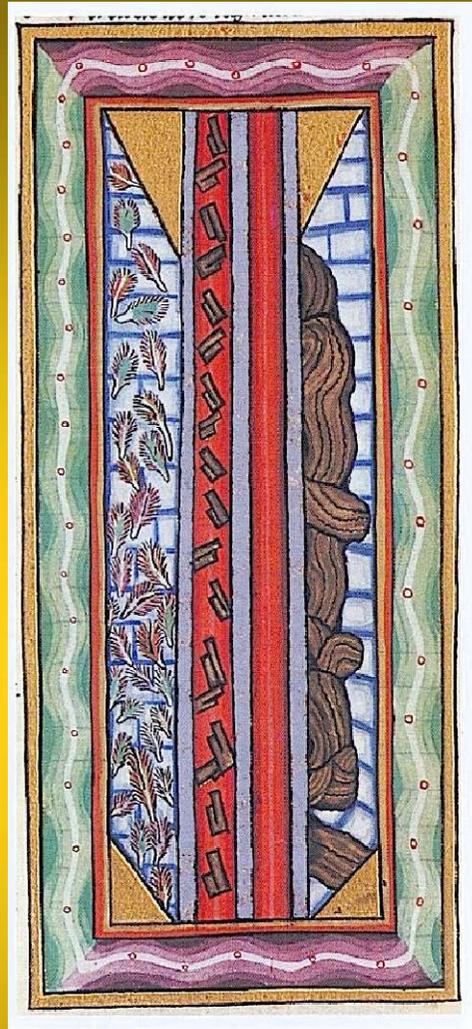
1) Scutum fidei:



Die Erklärung ist leicht:
 Pater non est Filius, non est Spiritus S. — est Deus.
 Intellectus non est Voluntas, non est memoria — est rationalis anima.
 Nix non est glacies, non est pluvia, est aqua und so fort.

FS 22
 HÖFLER, *Geschichtschreiber* 3, S. 19f.: »Cod. Universit. Monac. n. 186f. 34«.

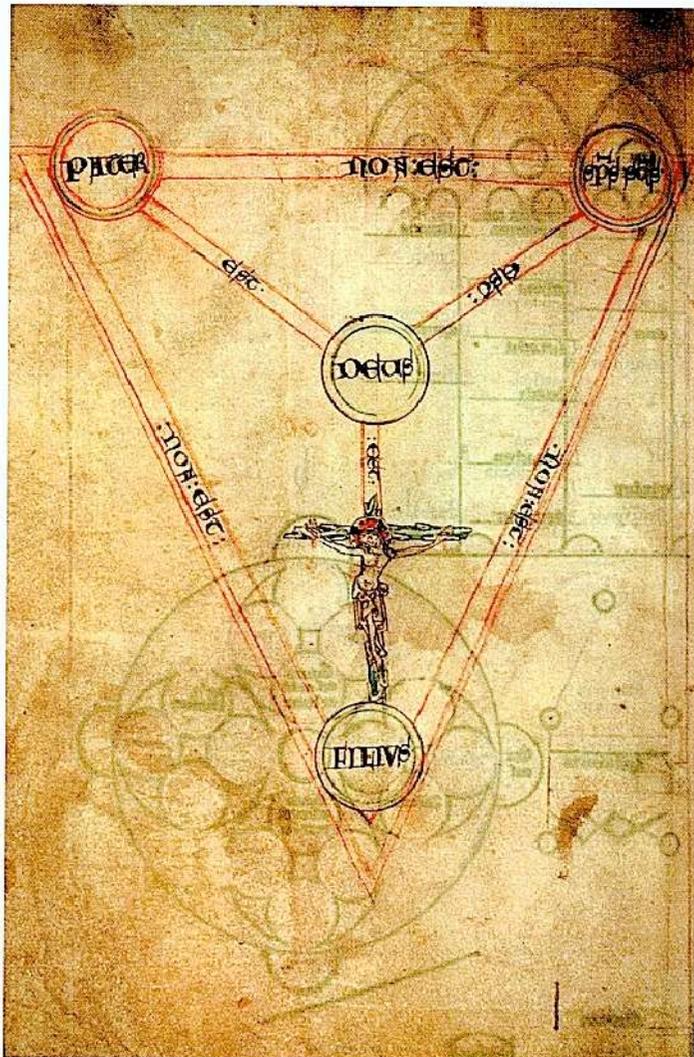
Guillaume de CONCHE
 1080 ? – 1150 ?



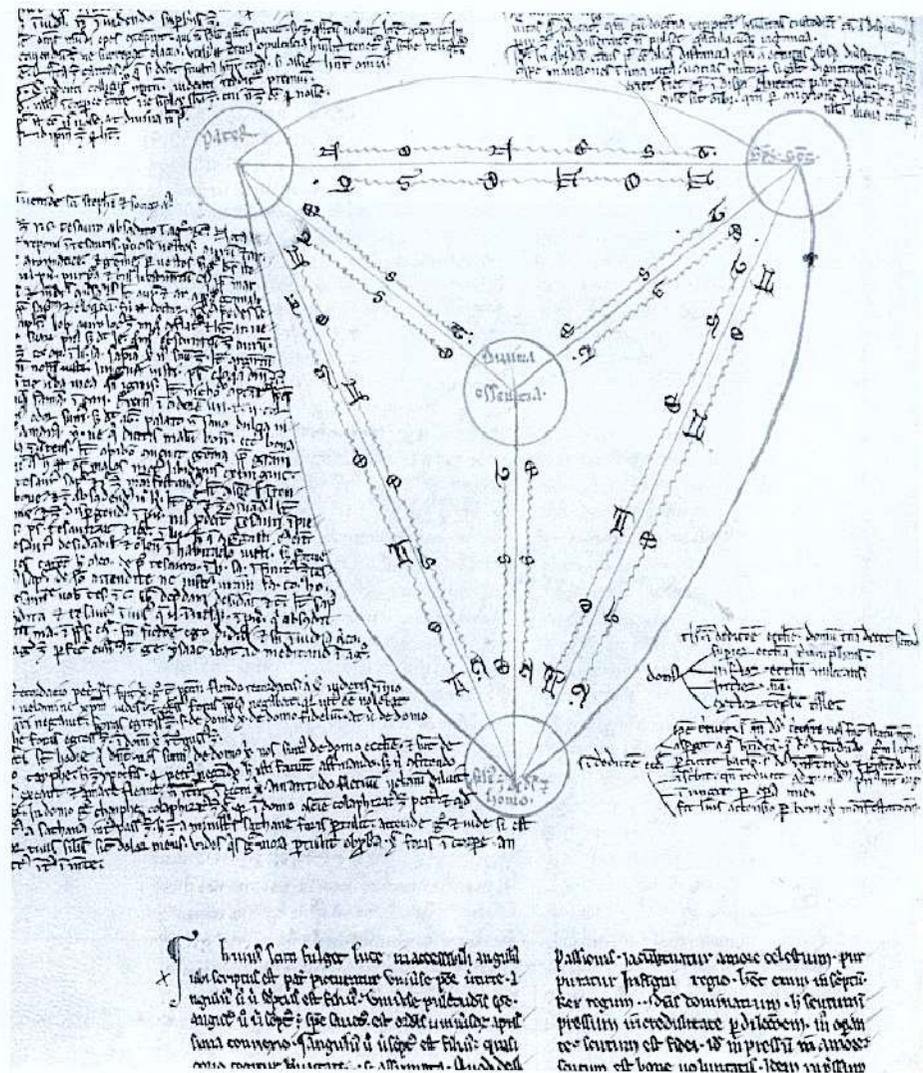
Hildegard von BINGEN

1098-1179

Forme symbolique hybride de la Trinité

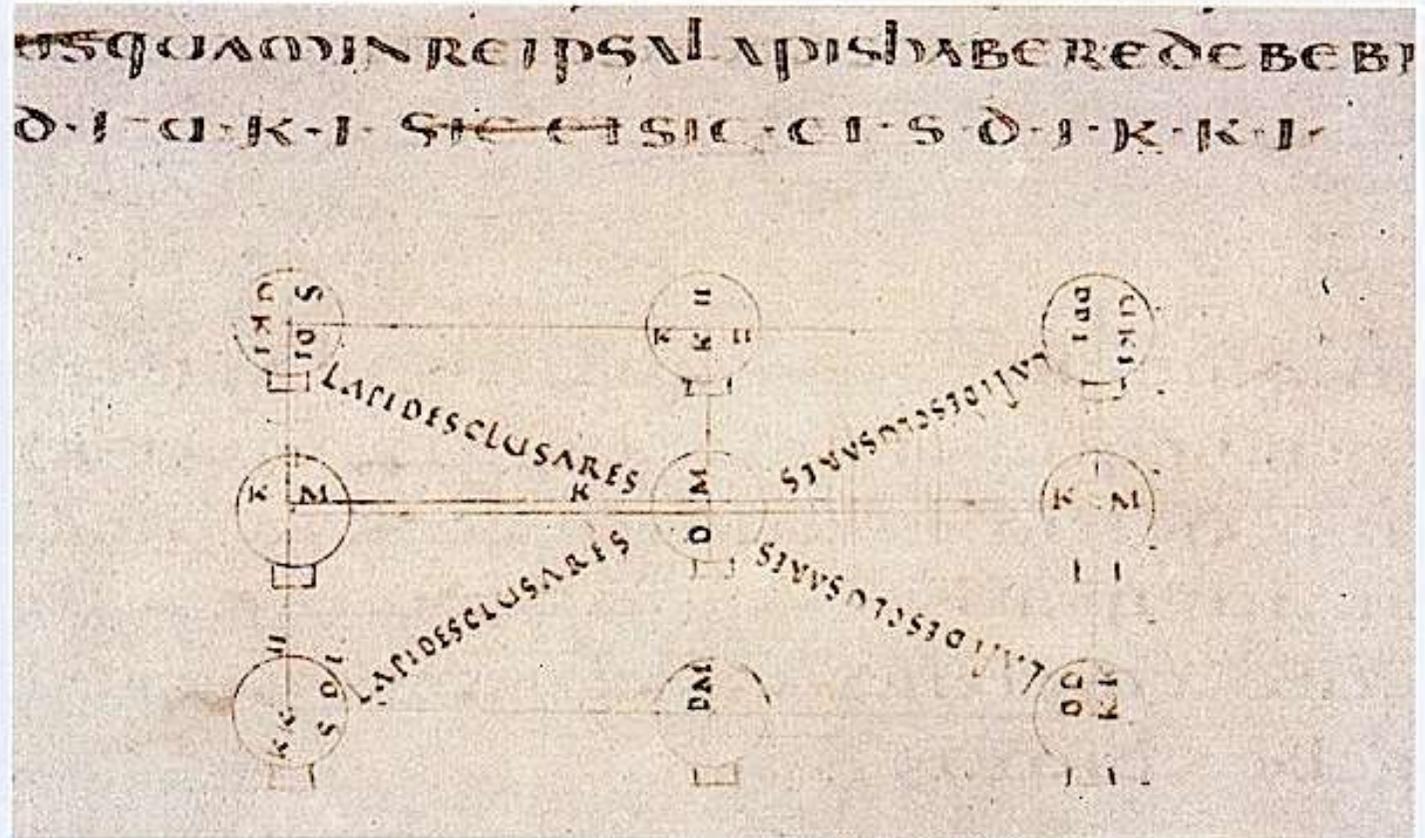


FS 2
 Petrus von Poitiers, Compendium historiae in genealogia
 Christi, London, BL, Cotton Faustina B VII, fol. 42^v.



FS 3
 Robertus Grosseteste, Dicta, Durham
 Cathedral, A. III. 12, fol. 14^v (vor 1231).

Pierre de Poitiers
 1130 - 1215



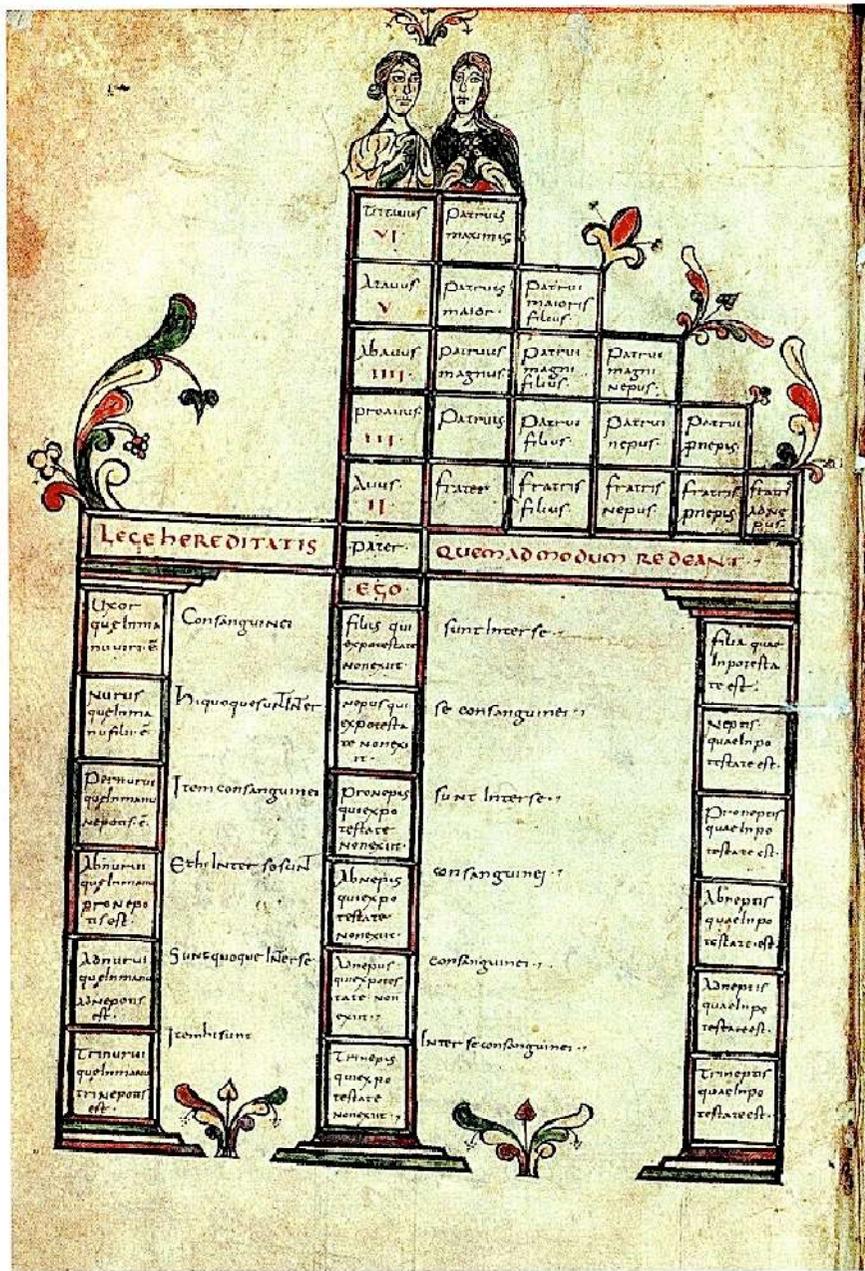
BT 3

Wolfenbüttel, Herzog-August-Bibliothek, Codex

Arcerianus, Cod. Guelf. 36.23 Aug. 2, fol 58^r.

Corpus Agrimensorum Romanorum

Daté du VIème siècle



BT 5
Paris, BN, lat. 4410, fol. 3^v.

Urur- 6 urur- großvater						
Ururur- 5 großvater	Urur- 6 groß- onkel					
Urur- 4 großvater	Ur- 5 groß- onkel	Sohn 6 d. Urgrö- onkels				
Urgrö- 3 vater	Groß- 4 onkel	Sohn 5 d. Groß- onkels	Enkel 6 d. Groß- onkels			
Groß- 2 vater	Onkel 3	Sohn 4 des Onkels	Enkel 5 des Onkels	Ur- 6 enkel d. Onkels		
Vater 1	Bruder 2	Sohn 3 des Bruders	Enkel 4 des Bruders	Ur- 5 enkel d. Bruders	Urur- 6 enkel d. Bruders	
ICH						
Sohn 1					Tochter 1	
Enkel 2					Enkelin 2	

BT 6
Rekonstruktion des Schemas.

Arbores consanguinitatis

IXème siècle tardif reproduisant un schème du IIème siècle romain



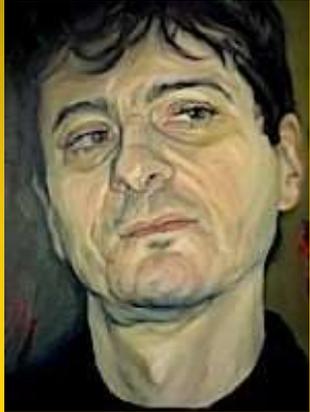
Gravure originale de Claude DARRAS

« Si les stratagèmes allusifs peuvent prétendre définir un nouveau type de systématique, c'est parce qu'ils donnent accès à un espace d'entrelacement de la singularité du diagramme et de la métaphore [...]. Cet entrelacement est un dispositif où chaque composante s'adosse aux autres : sans le diagramme, la métaphore ne serait qu'une fulguration sans lendemain parce qu'incapable d'opérer ; sans la métaphore, le diagramme ne serait qu'une icône gelée, incapable de sauter par-dessus ses traits gras qui retiennent les images d'un savoir déjà acquis ; sans la subversion du fonctionnel par le singulier, rien ne viendrait contrarier la force de l'habitude ».

Gilles CHÂTELET, Séminaire Ens, 1997. Publié en anglais sous le titre, « *Interlacing the singularity, the diagram and the metaphor* », in [Duffy ed.] *Virtual Mathematics*, Manchester, Clinamen Press, 2006, p. 31-45.

συμπλεκτικός signifie proprement « qui entrelace », en particulier dans le contexte des sciences naturelles (« qui est entrelacé avec une autre corps ou une autre partie ») ; ce qui a donné le latin **complexus** (enlacement) et **complex** (uni, joint), eux-mêmes dérivés de **complector** (qui signifie, en son sens figuré, « SAISIR par l'intelligence, par la pensée, par la mémoire ou par l'imagination » et « embrasser [comprendre] dans un exposé » : **una comprehensione omnia complecti** = « comprendre tout dans une formule unique »). L'utilisation de ce mot en mathématiques est due à Hermann Weyl qui, dans un effort pour éviter une confusion sémantique, a rebaptisé l'obscur (pour l'époque) « groupe du complexe linéaire, « groupe symplectique » ;

Hermann WEYL, ***The Classical Groups. Their Invariants and Representations*** [1938], Princeton University Press, Princeton, 1946², **Chap. VI**, « The symplectic group », p. 165.



Faire remonter plus radicalement l'acte diagrammatique du tracé d'un dessin (explicité en sa pure figuration géométrique) à la lettre prise dans l'économie discursive de la formule, toute formule constituant déjà un diagramme complexe qui n'a de sens qu'au centre pointé d'un contexte théorique et d'une forme conceptuelle.

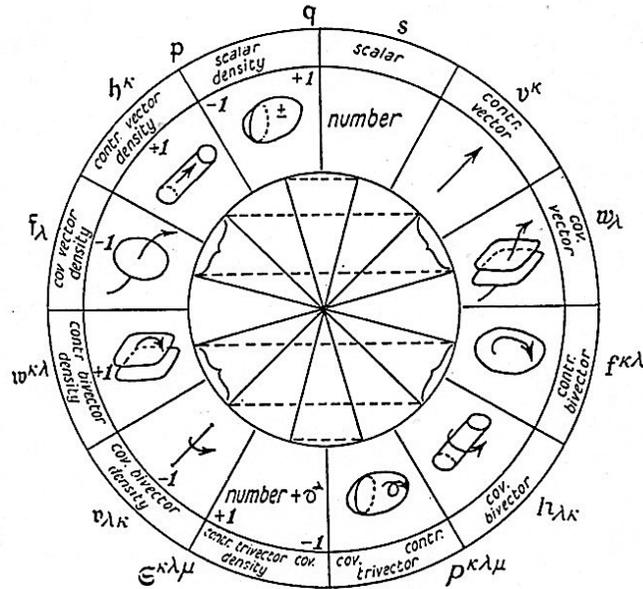
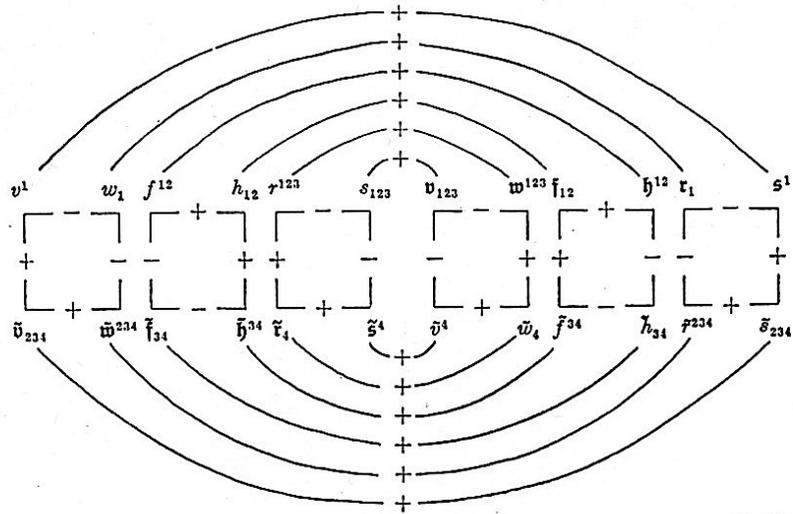
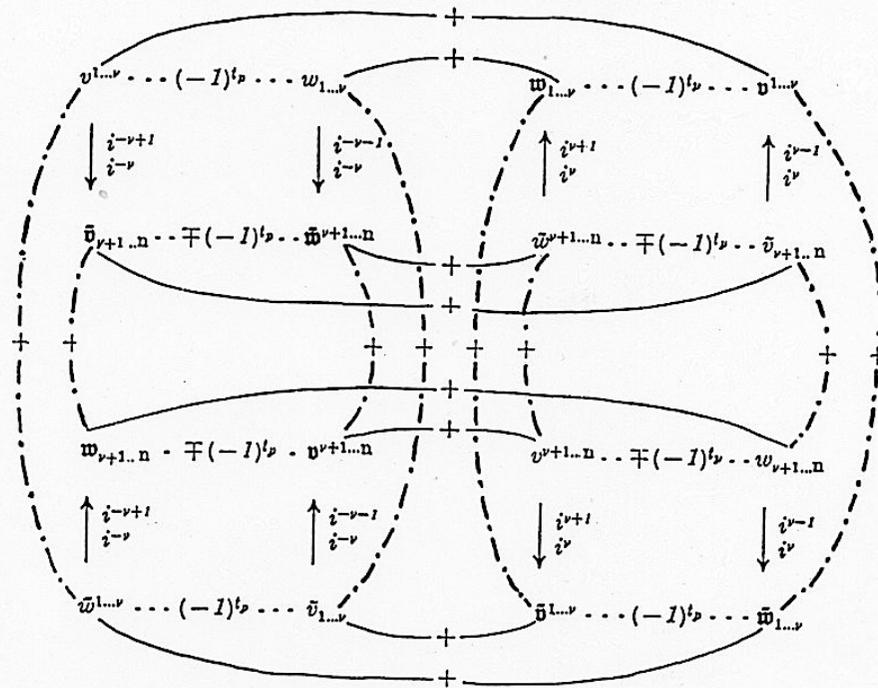


FIG. 13.

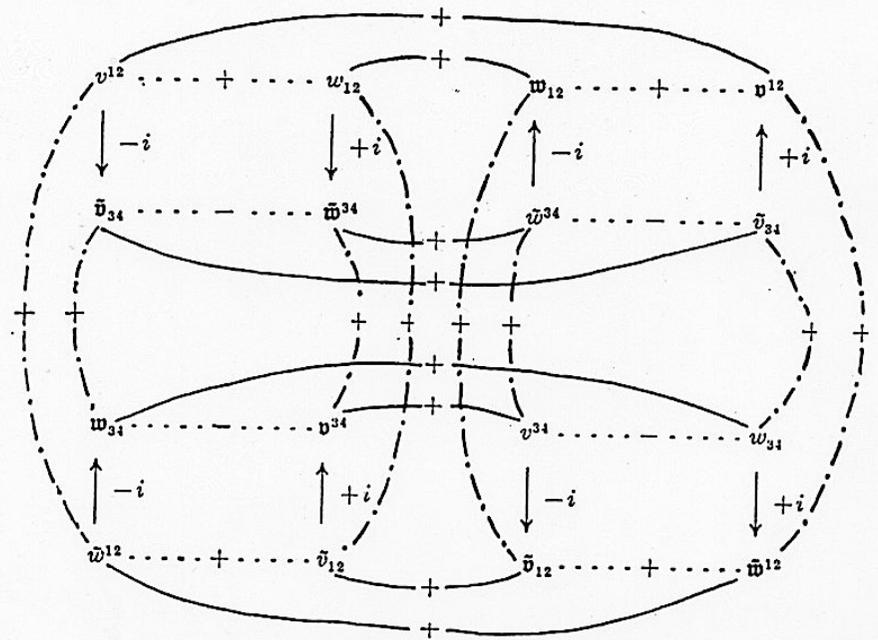
and the following table:



(4.24)

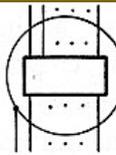


for odd/even signature. Accordingly we have for $n = 4$ and signature $---+$



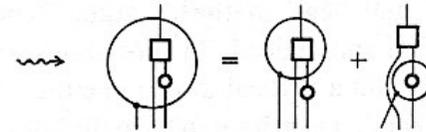
(4.15)

Covariant derivative:

$$\nabla_{\alpha} T_{\lambda \dots \nu}^{\beta \gamma \dots \epsilon} \rightsquigarrow$$


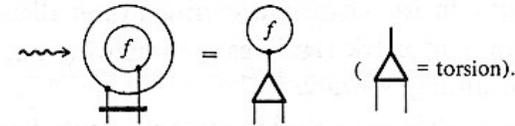
Leibniz law:

$$\nabla_{\alpha} (P_{\mu\nu}^{\lambda} U_{\beta}^{\nu}) = U_{\beta}^{\nu} \nabla_{\alpha} P_{\mu\nu}^{\lambda} + P_{\mu\nu}^{\lambda} \nabla_{\alpha} U_{\beta}^{\nu}$$



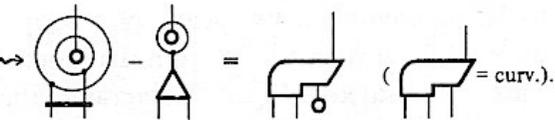
Torsion:

$$(\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) f = T_{\alpha\beta}^{\gamma} \nabla_{\gamma} f$$



Ricci identity:

$$(2\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} - T_{\alpha\beta}^{\gamma} \nabla_{\gamma}) V^{\delta} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} V^{\gamma}$$



Symmetries:

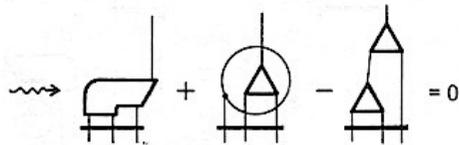


Lie derivative:

$$\mathfrak{L}_{\xi} \square = \square \circ \xi - \xi \circ \square + \square \circ \xi + \xi \circ \square \quad (\text{if } \nabla_{\alpha} \xi^{\alpha} = 0).$$

Bianchi symmetry:

$$R_{[\alpha\beta\gamma]}^{\delta} + \nabla_{[\alpha} T_{\beta\gamma]}^{\delta} + T_{[\alpha\beta}^{\rho} T_{\gamma]\rho}^{\delta} = 0$$



Bianchi identity:

$$\nabla_{[\alpha} R_{\beta\gamma]\rho}^{\sigma} + T_{[\alpha\beta}^{\delta} R_{\gamma]\delta\rho}^{\sigma} = 0$$

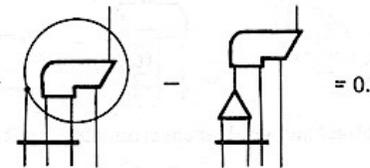
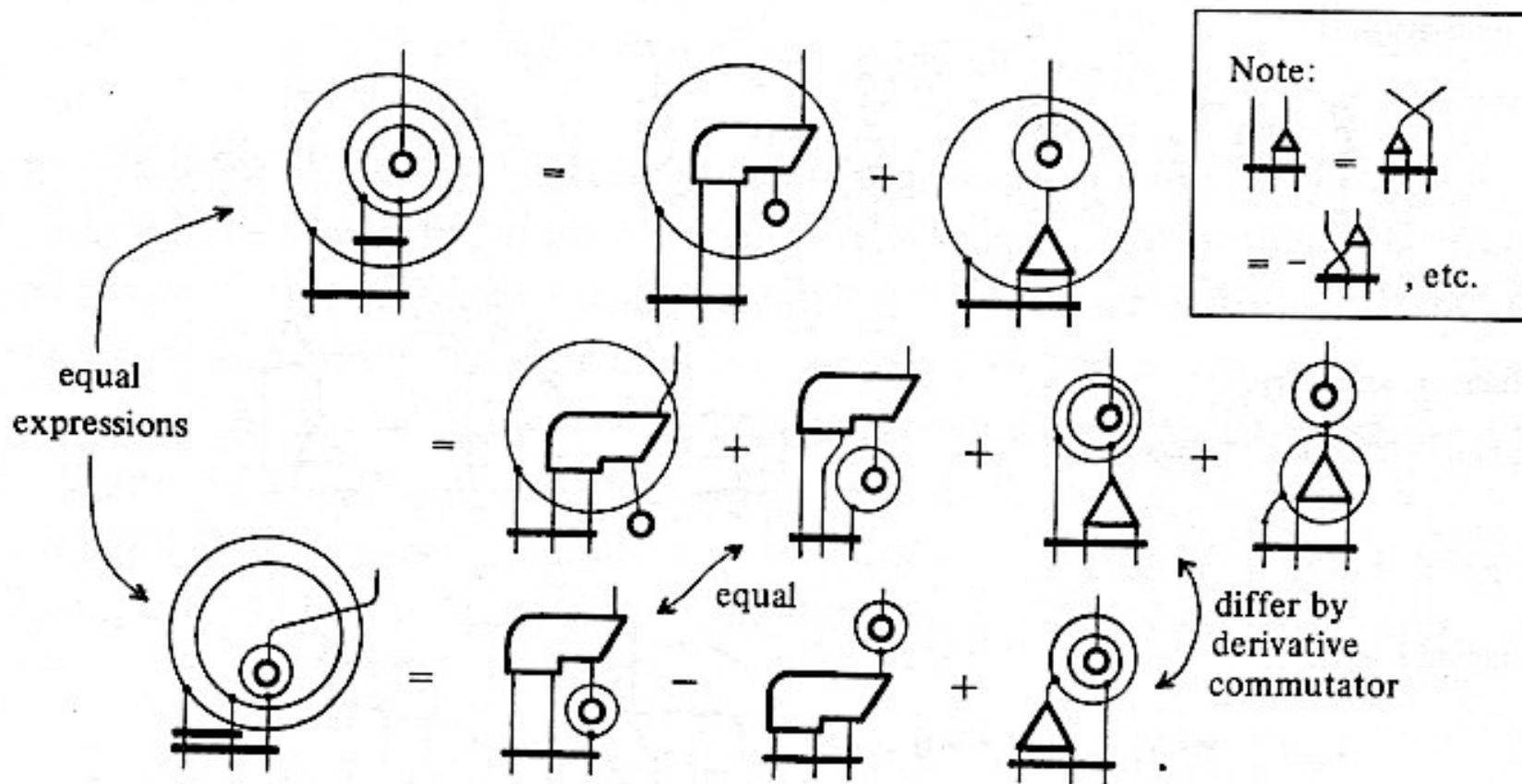


Fig. A-8. The 'loop' notation for (covariant) derivative; curvature, torsion.



Subtract and use Bianchi symmetry and Ricci identity to obtain

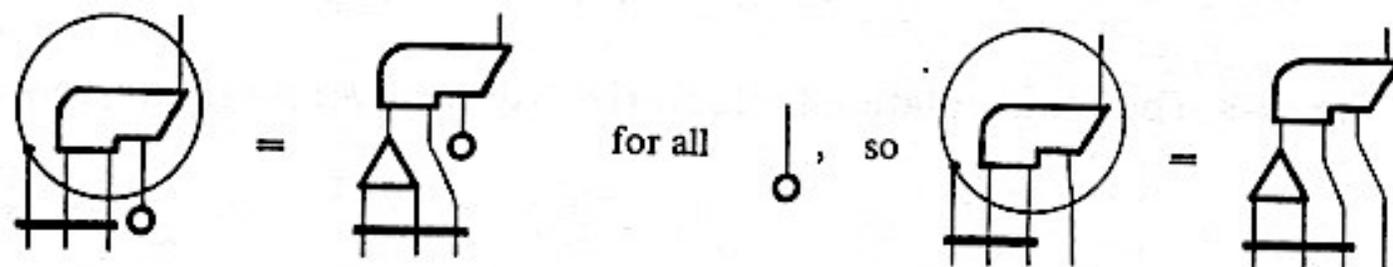


Fig. A-9. Proof, by diagrams, of the Bianchi identity with torsion.

Modèle Standard

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^0\partial_\mu\phi^0 - g_\mu f^{abc}\partial_\mu\phi^0\phi^a\phi^b - \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{cde}\phi^a\phi^b\phi^c\phi^d + \frac{1}{2}ig^2(\bar{\psi}_i^c\gamma^\mu\psi_j^c)\phi_\mu^0 \\
 & + G^a\phi^2G^a + g_\mu f^{abc}\partial_\mu G^a G^b G^c - \partial_\mu W_\mu^+ \partial_\mu W_\mu^- - M^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2}\partial_\mu Z_\mu^0 \partial_\mu Z_\mu^0 \\
 & - \frac{1}{2c_w^2}M^2 Z_\mu^0 Z_\mu^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\mu \partial_\mu A_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \partial_\mu\phi^+ \partial_\mu\phi^- - M^2\phi^+\phi^- \\
 & - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^0\partial_\mu\phi^0 - \frac{1}{2c_w^2}M\phi^0\phi^0 - \beta_h\left(\frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g}H + \frac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)\right) \\
 & + \frac{2M^4}{g^2}\alpha_h - ig_{cw}(A_\mu Z_\mu^0(W_\mu^+ W_\mu^- - W_\mu^+ W_\mu^-) - Z_\mu^0(W_\mu^+ \partial_\mu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\mu W_\mu^+)) \\
 & + Z_\mu^0(W_\mu^+ \partial_\mu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\mu W_\mu^+) - ig_{sw}(\partial_\mu A_\mu(W_\mu^+ W_\mu^- - W_\mu^+ W_\mu^-) \\
 & - A_\mu(W_\mu^+ \partial_\mu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\mu W_\mu^+) + A_\mu(W_\mu^+ \partial_\mu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\mu W_\mu^+)) \\
 & - \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\mu^- W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\mu^- W_\mu^+ W_\mu^- + g^2 c_w^2 (Z_\mu^0 W_\mu^+ Z_\mu^0 W_\mu^- - Z_\mu^0 Z_\mu^0 W_\mu^+ W_\mu^-) \\
 & + g^2 s_w^2 (A_\mu W_\mu^+ A_\mu W_\mu^- - A_\mu A_\mu W_\mu^+ W_\mu^-) + g^2 s_w c_w (A_\mu Z_\mu^0 (W_\mu^+ W_\mu^- - W_\mu^+ W_\mu^-) \\
 & - 2A_\mu Z_\mu^0 W_\mu^+ W_\mu^-) - g_{\phi h} M (H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-) \\
 & - \frac{1}{8}g^2\alpha_h (H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2H^2) \\
 & - g_M W_\mu^+ W_\mu^- H - \frac{1}{2}g\frac{M}{c_w^2}Z_\mu^0 Z_\mu^0 H \\
 & - \frac{1}{2}ig(W_\mu^+(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W_\mu^-(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)) \\
 & + \frac{1}{2}g(W_\mu^+(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) - W_\mu^-(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)) \\
 & + \frac{1}{2}g\frac{1}{c_w}(Z_\mu^0(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) - ig\frac{2}{c_w}MZ_\mu^0(W_\mu^+\phi^- - W_\mu^-\phi^+)) \\
 & + ig_{sw}MA_\mu(W_\mu^+\phi^- - W_\mu^-\phi^+) - ig\frac{1-2c_w^2}{2c_w}Z_\mu^0(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) \\
 & + ig_{sw}A_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \frac{1}{4}g^2 W_\mu^+ W_\mu^- (H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-) \\
 & - \frac{1}{4}g^2\frac{1}{c_w^2}Z_\mu^0 Z_\mu^0 (H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2c_w^2 - 1)^2\phi^+\phi^-) \\
 & - \frac{1}{2}g^2\frac{c_w^2}{c_w}Z_\mu^0\phi^0(W_\mu^+\phi^- + W_\mu^-\phi^+) - \frac{1}{2}ig\frac{c_w^2}{c_w}Z_\mu^0 H(W_\mu^+\phi^- - W_\mu^-\phi^+) \\
 & + \frac{1}{2}g^2 s_w A_\mu\phi^0(W_\mu^+\phi^- + W_\mu^-\phi^+) + \frac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H(W_\mu^+\phi^- - W_\mu^-\phi^+) \\
 & - g^2\frac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z_\mu^0 A_\mu\phi^+\phi^- - g^2 s_w^2 A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- \\
 & - \bar{e}^\lambda(\gamma_0 + m_e^2)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda\gamma_0\nu^\lambda - \bar{u}_j^\lambda(\gamma_0 + m_u^2)u_j^\lambda - \bar{d}_j^\lambda(\gamma_0 + m_d^2)d_j^\lambda \\
 & + ig_{sw}A_\mu\left(-\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda + \frac{2}{3}(\bar{\nu}_j^\lambda\gamma^\mu\nu_j^\lambda) - \frac{1}{3}(\bar{d}_j^\lambda\gamma^\mu d_j^\lambda)\right) \\
 & + \frac{ig}{4c_w}Z_\mu^0\left((\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1 + \gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda)\right) \\
 & + (\bar{\nu}_j^\lambda\gamma^\mu(\frac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5)\nu_j^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda\gamma^\mu(1 - \frac{8}{3}s_w^2 - \gamma^5)d_j^\lambda)) \\
 & + \frac{ig}{2\sqrt{2}}W_\mu^+\left((\bar{u}^\lambda\gamma^\mu(1 + \gamma^5)u^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda\gamma^\mu(1 + \gamma^5)d_{j,c}^\lambda)\right) \\
 & + \frac{ig}{2\sqrt{2}}W_\mu^-\left((\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(1 + \gamma^5)e^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda C_{1,c}^\lambda\gamma^\mu(1 + \gamma^5)d_j^\lambda)\right) \\
 & + \frac{ig}{2\sqrt{2}}\frac{m_\lambda^2}{M}\left(-\phi^+(\bar{\nu}^\lambda(1 - \gamma^5)\nu^\lambda) + \phi^-(\bar{e}^\lambda(1 + \gamma^5)e^\lambda)\right) \\
 & - \frac{g}{2}\frac{m_\lambda^2}{M}\left(H(\bar{\nu}^\lambda e^\lambda) + i\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda)\right) \\
 & + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+\left(-m_\lambda^2(\bar{\nu}_j^\lambda C_{1,c}^\lambda(1 - \gamma^5)\nu_j^\lambda) + m_\lambda^2(\bar{e}_j^\lambda C_{1,c}^\lambda(1 + \gamma^5)e_j^\lambda)\right) \\
 & + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-\left(m_\lambda^2(\bar{d}_j^\lambda C_{1,c}^\lambda(1 + \gamma^5)d_j^\lambda) - m_\lambda^2(\bar{d}_j^\lambda C_{1,c}^\lambda(1 - \gamma^5)d_j^\lambda)\right) \\
 & - \frac{g}{2}\frac{m_\lambda^2}{M}H(\bar{\nu}_j^\lambda\nu_j^\lambda) - \frac{g}{2}\frac{m_\lambda^2}{M}H(\bar{d}_j^\lambda d_j^\lambda) + \frac{ig}{2}\frac{m_\lambda^2}{M}\phi^0(\bar{\nu}_j^\lambda\gamma^5\nu_j^\lambda) - \frac{ig}{2}\frac{m_\lambda^2}{M}\phi^0(\bar{d}_j^\lambda\gamma^5 d_j^\lambda) \\
 & + \mathcal{X}^+(\partial^2 - M^2)\mathcal{X}^+ + \mathcal{X}^-(\partial^2 - M^2)\mathcal{X}^- + \mathcal{X}^0(\partial^2 - \frac{M^2}{c_w^2})\mathcal{X}^0 \\
 & + \mathcal{Y}(\partial^2)\mathcal{Y} + ig_{cw}W_\mu^+(\partial_\mu\mathcal{X}^0\mathcal{X}^- - \partial_\mu\mathcal{X}^+\mathcal{X}^0) + ig_{sw}W_\mu^+(\partial_\mu\mathcal{Y}\mathcal{X}^- - \partial_\mu\mathcal{X}^+\mathcal{Y}) \\
 & + ig_{cw}W_\mu^-(\partial_\mu\mathcal{X}^-\mathcal{X}^0 - \partial_\mu\mathcal{X}^0\mathcal{X}^+) + ig_{sw}W_\mu^-(\partial_\mu\mathcal{X}^-\mathcal{Y} - \partial_\mu\mathcal{Y}\mathcal{X}^+) \\
 & + ig_{cw}Z_\mu^0(\partial_\mu\mathcal{X}^+\mathcal{X}^- - \partial_\mu\mathcal{X}^-\mathcal{X}^+) + ig_{sw}A_\mu(\partial_\mu\mathcal{X}^+\mathcal{X}^- - \partial_\mu\mathcal{X}^-\mathcal{X}^-) \\
 & - \frac{1}{2}gM\left(\mathcal{X}^+\mathcal{X}^+H + \mathcal{X}^-\mathcal{X}^-H + \frac{1}{c_w^2}\mathcal{X}^0\mathcal{X}^0H\right) \\
 & + \frac{1-2c_w^2}{2c_w}igM\left(\mathcal{X}^+\mathcal{X}^0\phi^+ - \mathcal{X}^-\mathcal{X}^0\phi^-\right) \\
 & + \frac{1}{2c_w}igM\left(\mathcal{X}^0\mathcal{X}^-\phi^+ - \mathcal{X}^0\mathcal{X}^+\phi^-\right) \\
 & + igMs_w\left(\mathcal{X}^0\mathcal{X}^-\phi^+ - \mathcal{X}^0\mathcal{X}^+\phi^-\right) \\
 & + \frac{1}{2}gM\left(\mathcal{X}^+\mathcal{X}^+\phi^0 - \mathcal{X}^-\mathcal{X}^-\phi^0\right).
 \end{aligned}$$

Lagrangien standard

Modèle Standard en couplage minimal

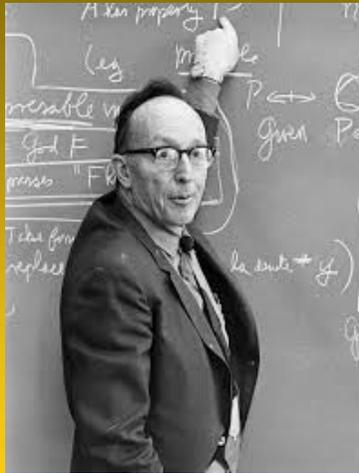
$$\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GH} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{Gf} + \mathcal{L}_{Hf}$$

Action Spectrale (ac+ac)

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2\kappa_0^2} R - \mu_0^2 (H^* H) \right. \\ & + a_0 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + b_0 R^2 + c_0 {}^*R^*R + d_0 R_{;\mu}{}^\mu \\ & + e_0 + \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} \\ & \left. + \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu H|^2 - \xi_0 R |H|^2 + \lambda_0 (H^* H)^2 \right) \end{aligned}$$

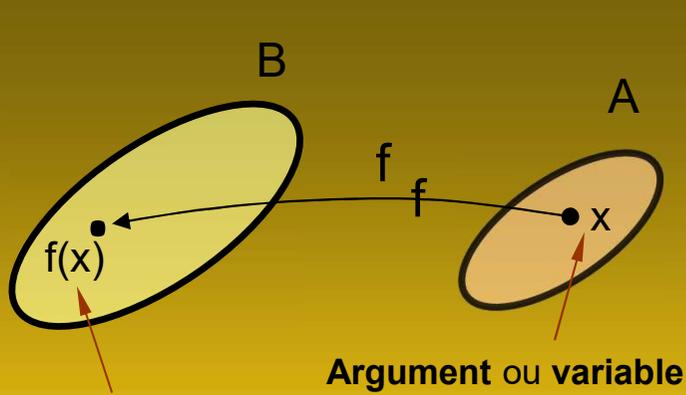
Diagramma

- *δια-γραφειν* = dessiner ; décrire || enregistrer ; attribuer || effacer.
- *δια-γραμμα* (το) = 1° figure dessinée ||
 - 2° registre || 3° décret.
 - Statut du *δια-* : prép. signifiant à *travers*. Ici, *ce qui perce* (dans) le gramme et *traverse l'écriture* (et la « formule »).



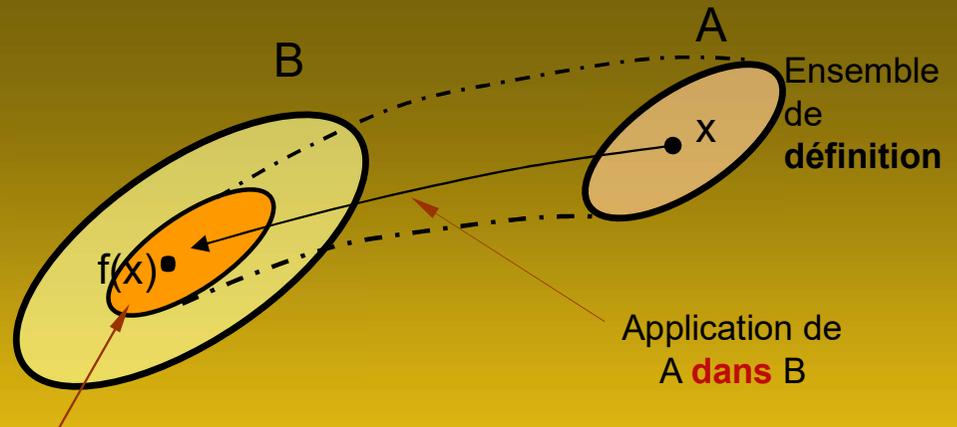
« The fundamental idea of representing a function by an arrow first appeared in topology [...]. The arrow $f: X \rightarrow Y$ rapidly displaced the occasional notation $f(X) \subset Y$ for a function. It expressed well a central interest of topology. Thus a notation (*the arrow*) led to a concept (category) ».

Sanders Mac LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin, 1971, p. 29.

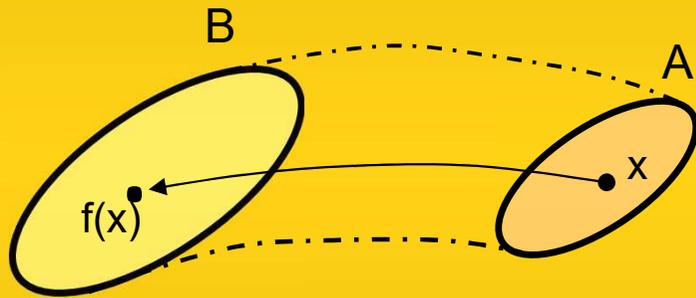


Argument ou variable

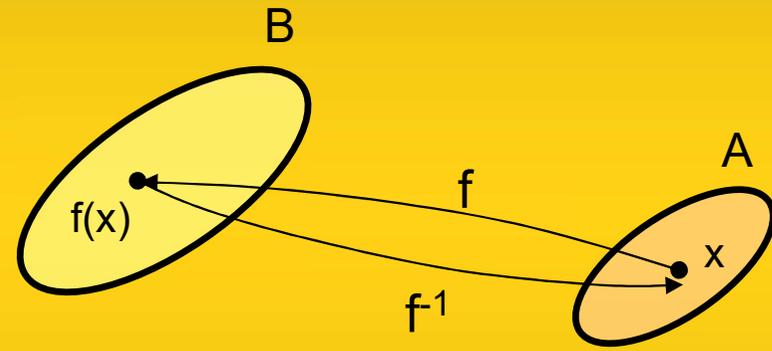
Image ou valeur de la fonction



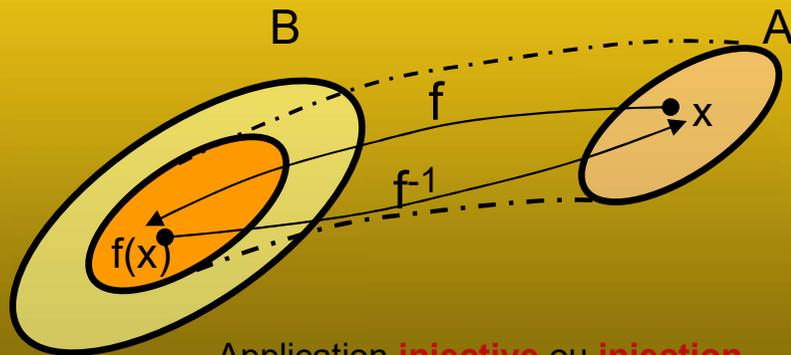
Ensemble des valeurs



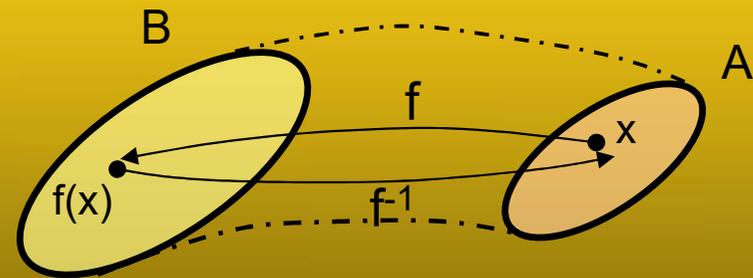
Application de A **sur** B ou **surjection**



f , fonction **injective**
 f^{-1} fonction **inverse**



Application **injective** ou **injection**



Application **bijective** ou **bijection**

$$\begin{aligned}
 & f: \\
 G_1 & \longrightarrow \text{Im } f \in G_2 \\
 g_0 & \longrightarrow e \in \text{Im } f \\
 g'_0 & \longrightarrow e \in \text{Im } f \\
 g & \longrightarrow \underline{g} \in \text{Im } f \\
 g^{-1} & \longrightarrow \underline{g}^{-1} \in \text{Im } f \\
 g g \circ g^{-1} & \longrightarrow \underline{g} e \underline{g}^{-1} = e \in \text{Im } f \\
 \therefore g g \circ g^{-1} & \in \text{Ker } f.
 \end{aligned}$$

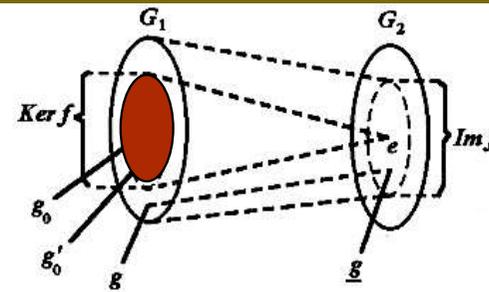


Figure 6.3.1

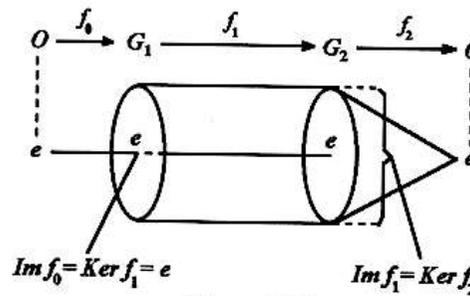


Figure 6.3.2

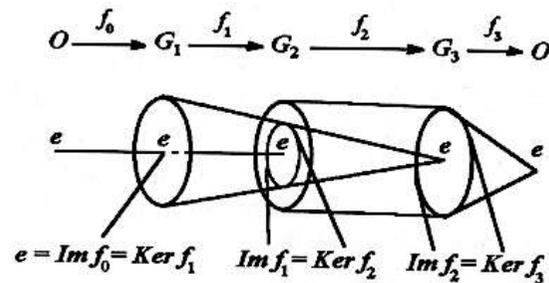


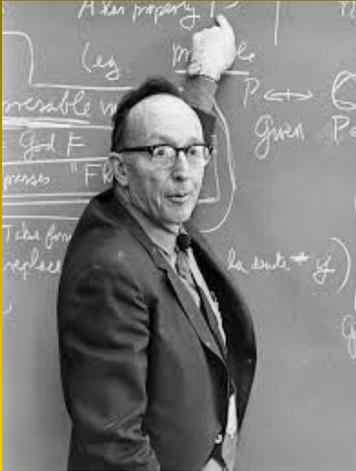
Figure 6.3.3

Séquences homomorphiques & structure des groupes d'homotopie

Théorème des séquences exactes

« Le rapport entre “noyau de fruit” et “noyau d’homomorphisme” n’est pas de simple et arbitraire homonymie. [...] “le noyau enferme et maintient un arbre virtuel conforme à son espèce”. C’est cette fonction de “signal” d’invariance, au sein d’un domaine en devenir, qui me paraît autoriser les extensions de signification aux champs les plus étrangers au départ à nos expériences naturelles usuelles. Ainsi l’usage du mot a été admis pour désigner, au sein de l’atome, la région où se trouve concentrée sa charge, au sein de la cellule la région où se trouve concentré et préservé son matériel génétique : toujours conformément à une exigence d’invariance, chaque fois spécifique, et repérable selon des procédures appropriées. Dans la langue des algébristes, un noyau prend le sens de : *invariant* ».

Jean-Toussaint DESANTI, *Philosophie : un rêve de flambeur. Variations philosophiques 2*, Paris, Grasset, 1999, p. 138.



« Une preuve n'est pas seulement une série de pas individuels, mais un groupe de pas, rassemblés en vue d'un plan et d'une intention définis [...]. Nous affirmons ainsi que toute preuve mathématique possède une idée directrice (prédominante) *<leitende Idee>* qui détermine chaque pas individuel et qui peut être donnée comme un plan de la preuve *<Beweisplan>*.

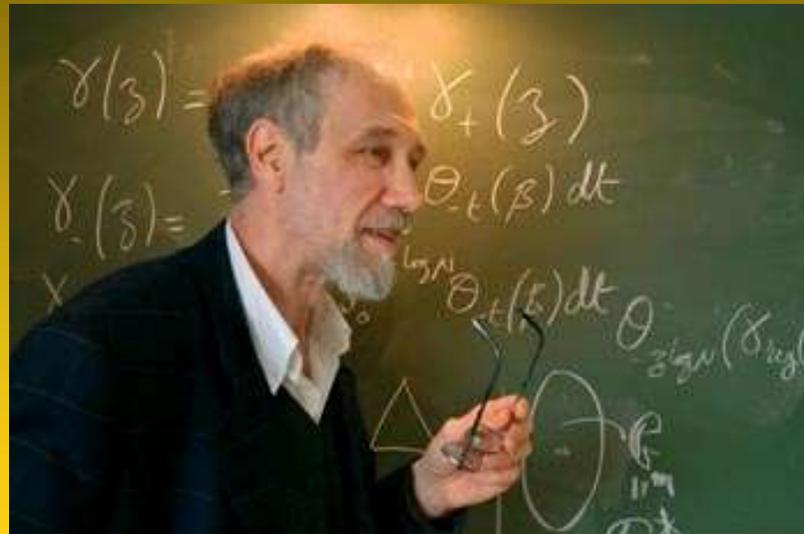
[...] De nombreux styles fondamentalement différents peuvent être utilisés pour donner n'importe quelle preuve – le style précis, symbolique et détaillé utilisé dans les *Principia* et dans bien d'autres parties des Mathématiques, qui requiert un exposé rigoureux des pas d'épreuve au prix des idées sous-jacentes –, et le style intuitif, conceptuel qui déploie toujours les idées et les méthodes centrales d'une preuve, de manière à comprendre les manipulations individuelles à la lumière de ces idées. Ce style est pratiqué en particulier dans les ouvrages et dans les cours d'Hermann Weyl »

Saunders Mac Lane, *Abgekürzte Beweise in Logikkalkul*, 1934, PhD Thesis, Georg August-Universität zu Göttingen. Réédité in I. Kaplansky [éd.], *Saunders Mac Lane Selected Papers*, New York, Springer Verlag, 1979, p. 1-62.



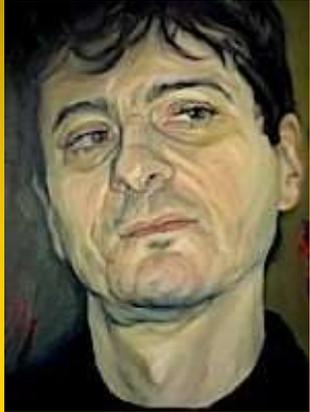
« Le diagramme représente une Forme définie de Relation. La relation est ordinairement une relation qui existe, comme dans une carte, ou bien une relation qu'on a l'intention de faire exister <is intended to exist>, comme dans un plan »

Charles Sanders PEIRCE, « Prolegomena for an Apology to Pragmatism » [1906], in *The New Elements of Mathematics*, C. Eisele [ed.], La Haye, Mouton Publishers, 1976.



« Pour un *working mathematician*, comprendre une démonstration ce n'est pas *refaire* une à une les étapes ou les lignes qui la constituent, mais *trouver un geste qui comprime*, qui permette de *saisir d'un seul coup* l'ensemble de la démonstration »,

Alain CONNES, Séminaire « Pensée des sciences », Ens, 2003.



Retour sur la question de la preuve diagrammatique

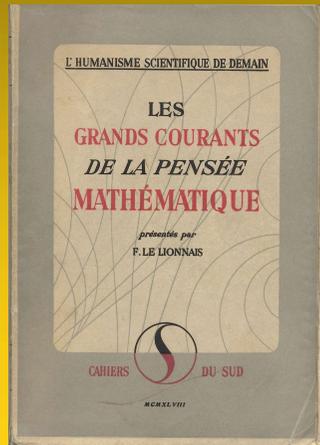
Ainsi, sur une échelle de grammaires (*diagramma*), mesurer l'écart entre deux ou plusieurs grammaires selon une nouvelle dimension analogique et de nouvelles connexions entre les grammaires, n'est autre que **S'ORIENTER DIAGRAMMATIQUEMENT DANS LA PENSÉE** et *fournir l'intuition de la solution* autant que mettre en place *l'expression machinique des virtualités prospectives qui délivreront la solution.*



« B. Très souvent les marques involontaires sont beaucoup plus profondément suggestives que les autres, et c'est à ce moment-là que vous sentez que *toute espèce de chose peut arriver*.— D. Vous le sentez au moment même où vous faites ces marques ? — B. **Non, les marques sont faites et on considère la chose comme on ferait d'une sorte de diagramme. Et l'on voit, à l'intérieur de ce diagramme, les possibilités de faits de toutes sortes s'implanter** »

Francis BACON, cité par Gilles DELEUZE dans *Francis Bacon. Logique de la sensation*, Paris, Seuil, 2002, note 87, ch. 12 « Le diagramme », p.94.

LES MATHÉMATIQUES COMME EXPÉRIENCE ARTISTIQUE

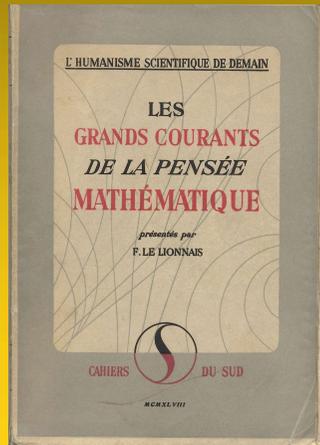


1948. François Le Lionnais publie *Les Grands courants de la pensée mathématique*, réédition, Paris, Hermann, 1998, ed. Bernard Teissier.

Dans le chapitre III, *Influences*, la quatrième partie est consacrée à *Les Mathématiques, la Beauté, l'Esthétique et les Beaux-Arts*, p. 437-498. L'article fondamental de Le Lionnais est intitulé, *La Beauté en mathématiques*.

1948. La date à laquelle Grothendieck, âgé d'à peine 20 ans, écrit son premier texte manuscrit connu et le premier document concernant son intérêt pour les mathématiques (Lettre manuscrite de 32 pages adressée à Wilhelm Heydorn, en date du 29 Juillet).

LES MATHÉMATIQUES COMME EXPÉRIENCE ARTISTIQUE



Le Lionnais déclare en Introduction : il s'agit de « **multiplier les témoignages des liens qui unissent les mathématiques et l'art. Il s'agit là d'un domaine assez peu exploré jusqu'ici** et sur lequel il valait la peine de faire converger les efforts [...] **L'esthétique des mathématiques doit être distinguée de l'application des mathématiques à l'esthétique** », p. 435.

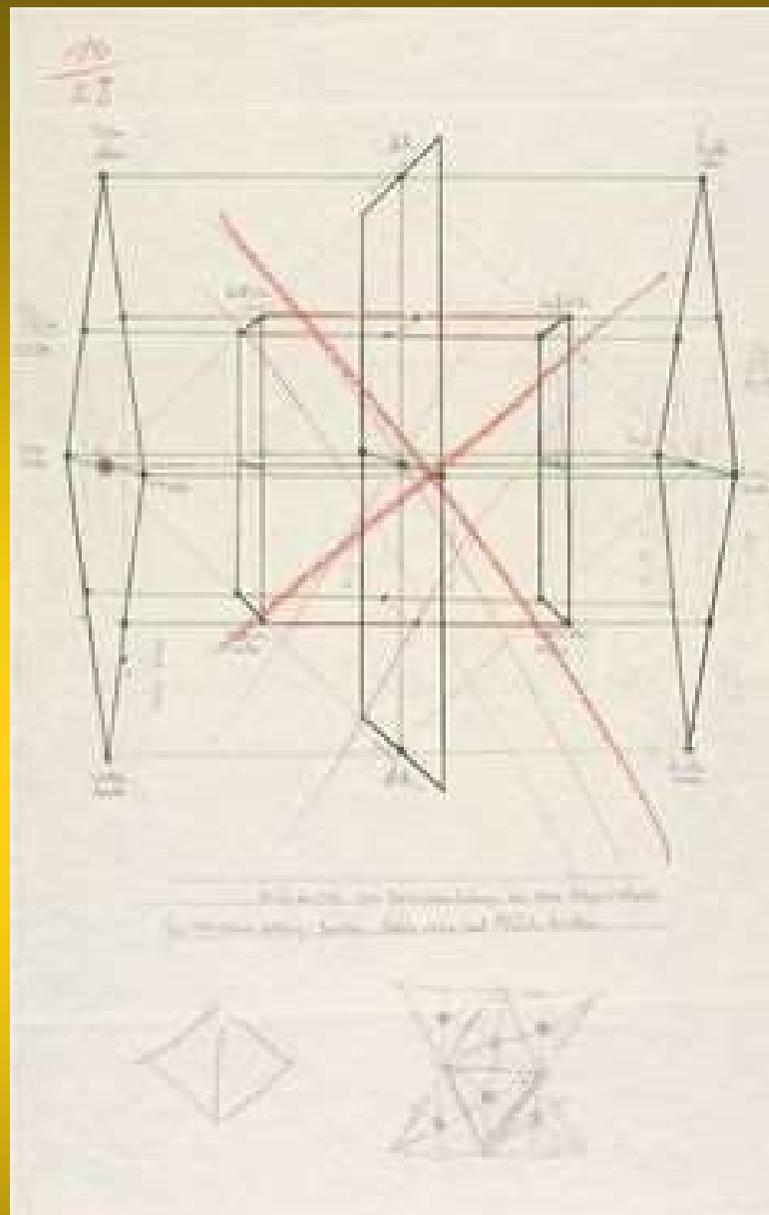
Et Le Lionnais de citer « **Le nombre est vivant dans l'Art** » et « **L'Art est la plus haute expression d'une arithmétique intérieure et inconsciente** », citations dues respectivement à Saint Augustin et à Leibniz.

« La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre **si d'abord** on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. ***Il est écrit en langage mathématique***, et les caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. Dépourvu de ces moyens, on erre vainement dans un labyrinthe obscur. »,

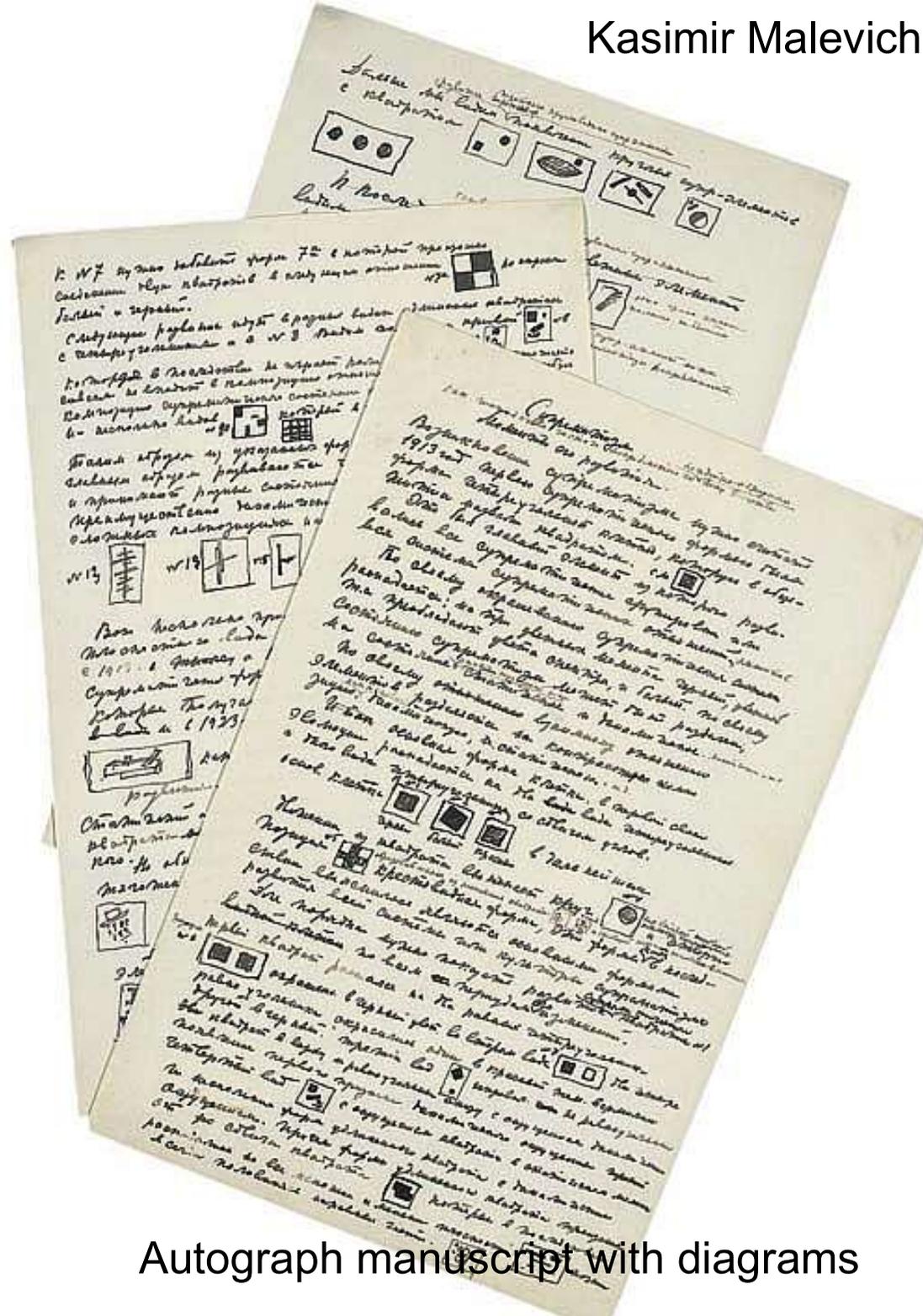
Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, traduction française de Christiane Chauviré, L'Esseyeur, Les Belles-Lettres, Paris, 1980.

« Pour moi à vrai dire, j'estime que le livre de la philosophie est celui qui est perpétuellement ouvert devant nos yeux ; **mais comme *il est écrit en des caractères différents de ceux de notre alphabet***, il ne peut être lu par tout le monde ; **les caractères de ce livre *ne sont autres que triangles, carrés, cercles, sphères, cônes, pyramides*** et autres figures mathématiques **qui tiennent lieu de lettres** dans un tel livre. »

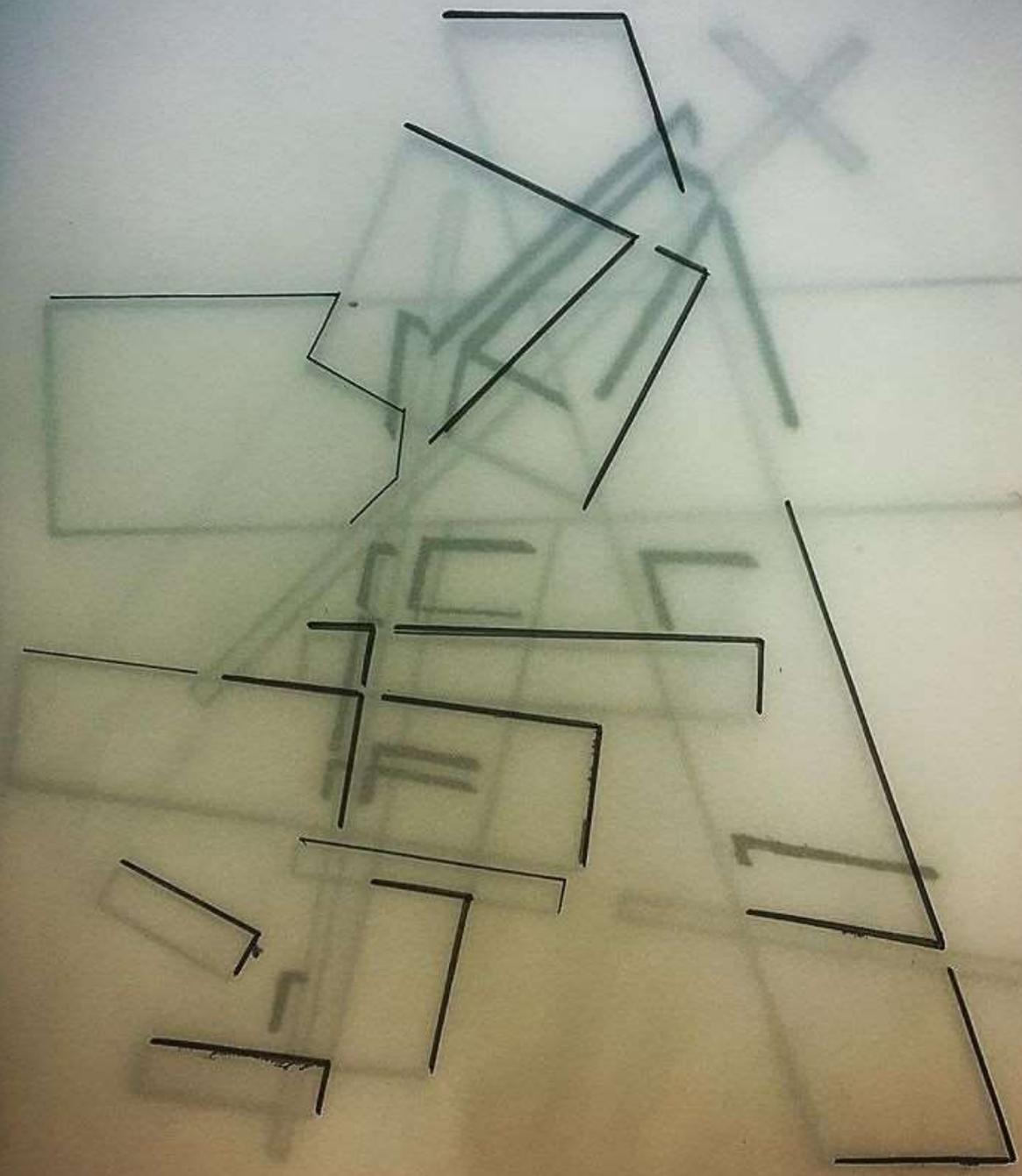
Galileo Galilei, *Lettre à Fortunio Liceti*, 11 janvier 1641. Opere, Ed. Nat., XVIII, p. 293-294 ; tr. fr. P. H. Michel in Galilée : *Dialogues et Lettres choisies*, Paris, Hermann, 1966, p. 428.



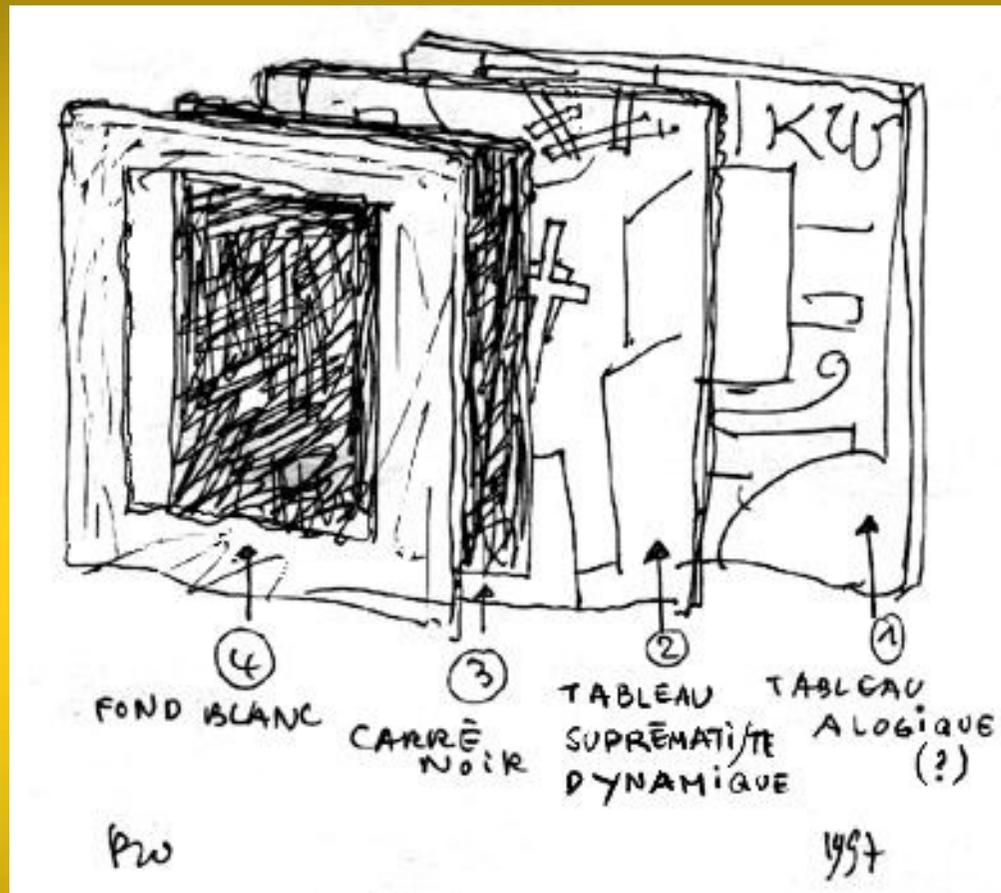
GOETHE, Diagramme de perception des couleurs



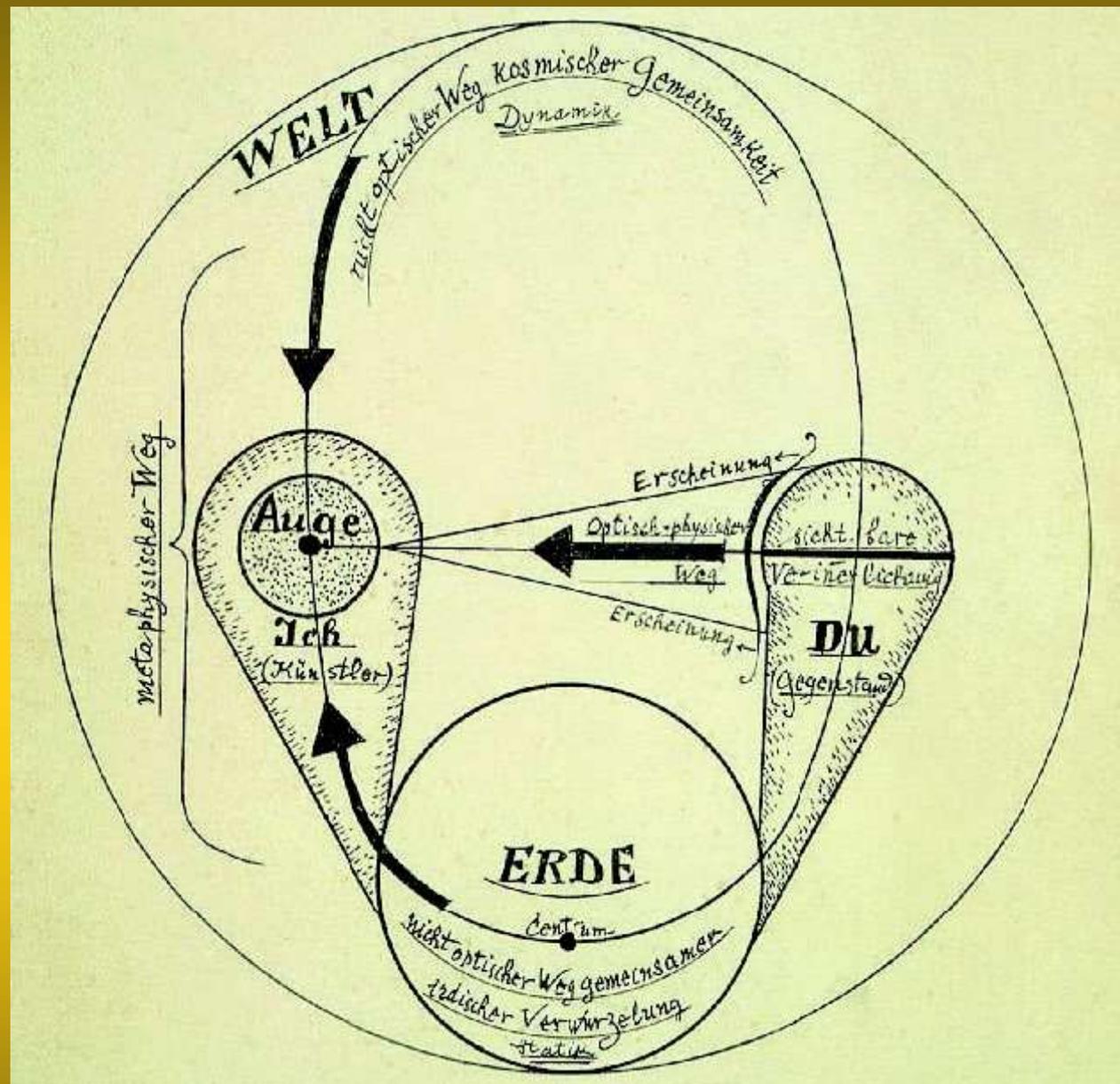
Autograph manuscript with diagrams



Kasimir Malevich diagram



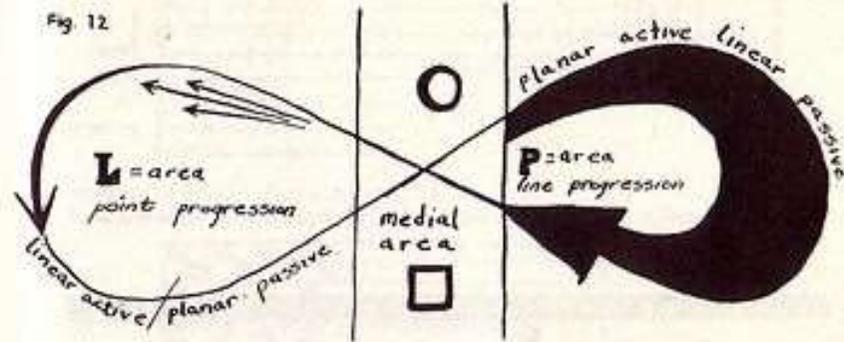
Carré noir décomposé
(palimpseste)



Paul KLEE. Diagramme intitulé *Me-You-Earth-World*
Wege des Naturstudiums (1923)



THREE CONJUGATIONS:



Semantic explanation
of the terms active, medial, and passive:

active: I fell (the man fells a tree with his ax).

medial: I fall (the tree falls under the ax stroke of the man).

passive: I am being felled (the tree lies felled).

Paul KLEE, from *Pedagogisches Skizzenbuch*
(1925)

«Characters are not individually exhibited as they actually occur, but their symbols are projected on the background of *an ordered manifold of possibilities* which can be generated by a fixed process and is *open into infinity*» .

H. WEYL, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, New-York, 1963, p.38.