



MONDÒVI

TOPOSES IN MONDOVÌ

TOPOI E MOTIVI, TRA MATEMATICA E MUSICA

9 SETTEMBRE 2024 • MONDOVÌ

LEZIONE-CONCERTO con

- Olivia Caramello
- Chiara Cattani
- Solisti dell'Academia Montis Regalis

Musiche di Bach, Corelli, Sammartini e Vivaldi



ACADEMIA
MONTIS REGALIS



Topoi, o i luoghi degli invarianti



« È il tema del topos ... che costituisce questo “letto”, o questo “fiume profondo”, dove vengono a sposarsi la geometria e l'algebra, la topologia e l'aritmetica, la logica matematica e la teoria delle categorie, il mondo del continuo e quello delle strutture “discontinue” o “discrete”... È la cosa più vasta che ho concepito, per cogliere con finezza, attraverso uno stesso linguaggio ricco di risonanze geometriche, una “essenza” comune a situazioni tra le più distanti tra loro, provenienti da tale regione o tal altra del vasto universo delle cose matematiche. »

A. Grothendieck – Récoltes et Semailles

I **topoi di Grothendieck** sono spazi astratti che incarnano il contenuto « semantico » di una grande quantità di situazioni matematiche, in un modo che è **invariante** rispetto alle differenti forme nelle quali queste situazioni si manifestano concretamente a noi.

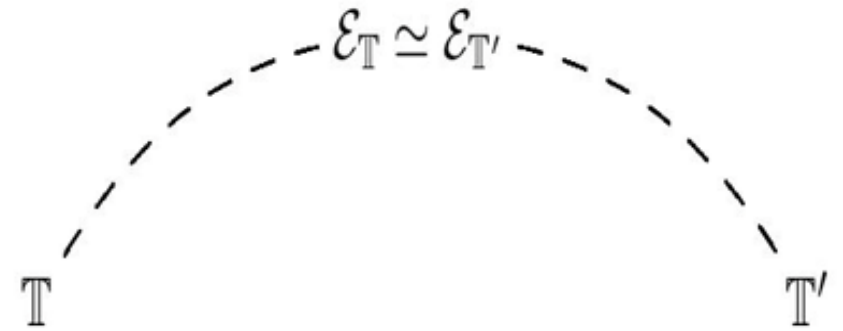
Possiamo pensare agli invarianti come a quelle « caratteristiche essenziali » delle cose che definiscono la loro natura intrinseca e che sono quindi stabili rispetto ad una grande quantità di possibili « trasformazioni ». In tal senso, gli invarianti costituiscono una generalizzazione della nozione familiare di **simmetria**.

Topoi come 'ponti' unificanti

In matematica, i topoi sono oggetti estremamente efficaci per costruire 'ponti' tra teorie differenti e trasferire conoscenze tra loro, grazie agli **invarianti** che essi supportano.

Il calcolo di come tali invarianti si esprimono in termini delle differenti presentazioni dei topoi dà luogo a una vera e propria **morfogenesi matematica**.

La dinamica dei 'ponti' consiste precisamente nel collegare tra loro diverse espressioni di un medesimo invariante.



Unità e diversità in musica

In musica, così come in matematica, la **bellezza** è il risultato di un **delicato equilibrio** tra unità e diversità:

- se un pezzo non presentasse « regolarità » (ovvero invarianti), non risulterebbe gradevole all'ascolto in quanto verrebbe percepito come « caotico » o privo di « significato »;
- d'altro canto, un'eccessiva ripetitività, senza un adeguato lavoro di variazione, può frustrare l'immaginazione dell'ascoltatore, risultando tediosa o, quantomeno, poco interessante

Come vedremo nella seconda parte della lezione, le « **variazioni** » che si utilizzano in musica possono avvenire **a diversi livelli** e riguardare **diversi aspetti**, quali il timbro, la ritmica, lo strumento, la posizione spaziale o temporale, etc.

I 'ponti' generati dagli invarianti risultano suggestivi in virtù dell'effetto che essi generano, una sorta di sospensione tra « familiarità » e « sorpresa ».

In particolare, nelle composizioni sotto forma di « **tema e variazioni** », l'invariante corrisponde al tema, che rappresenta l'unità « astratta » a partire dalla quale si genera una molteplicità di forme particolari, ovvero le « variazioni », di natura più concreta, le quali forniscono una **pluralità di « punti di vista »** sul tema stesso.

Sintassi e semantica

Da un punto di vista logico, possiamo interpretare l'esistenza di punti di vista diversi su uno stesso tema come l'esistenza di *sintassi differenti* aventi una *semantica comune*:

- La **sintassi** è l'insieme dei modi (nel senso di 'forme grammaticali') di descrivere linguisticamente un certo contenuto;
- La **semantica** è l'insieme dei modi di attribuire **significati** a delle espressioni sintattiche date (che di per sé non hanno alcun significato).

Ad esempio:

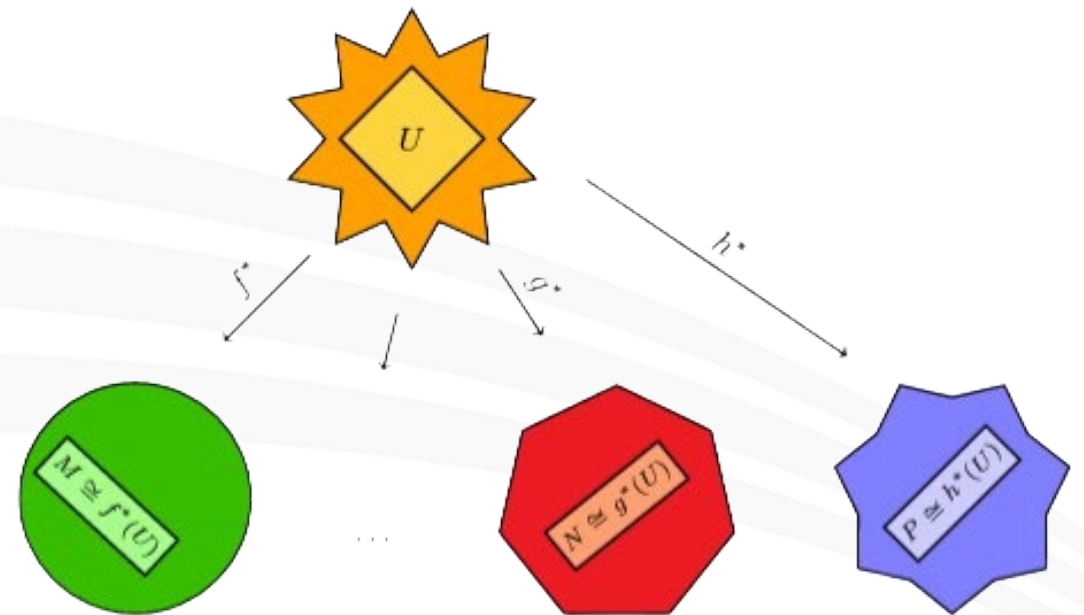
- ❖ le **lingue naturali** (italiano, inglese, cinese, giapponese, etc.) hanno ciascuna una propria sintassi, data dal proprio vocabolario e dalla relativa grammatica;
- ❖ In **musica**, lo spartito o partitura di una composizione ne costituisce la « sintassi », mentre le differenti interpretazioni che se ne possono dare appartengono al mondo della « semantica ».
- ❖ In **matematica**, gli assiomi di una teoria definiscono la sua sintassi, mentre i suoi modelli costituiscono la sua semantica

Oggetti universali

Per mettere in relazione diversi linguaggi o punti di vista, è generalmente necessario « **completarli** » al fine di realizzare esplicitamente il nascosto che è implicito in ciascuno di essi. È a livello di questi « completamenti » che gli invarianti, o le simmetrie, vivono.

Questi oggetti 'universali' costituiscono a tutti gli effetti dei « **centri di simmetria** », che governano la dinamica di generazione di forme a partire dall'unità che essi incarnano, generando 'ponti' tra esse.

Le differenti forme appaiono come « **deformazioni** » della « **forma universale** » che li genera.



Motivi



A. Grothendieck al pianoforte

« È stato alla fine degli anni Sessanta che ho iniziato a intravedere la cosa matematica più nascosta e misteriosa che mi sia mai capitato di scoprire, quella che ho chiamato “motivo”.

Ho sviluppato questa idea, accanto ai compiti fondazionali che ritenevo più urgenti, sotto il nome di “teoria dei motivi” o “filosofia (o “yoga”) dei motivi”, nel corso degli anni 1963-69. Si tratta di una teoria di affascinante ricchezza strutturale, di cui gran parte è rimasta ancora congetturale. »

« Espressa nel linguaggio non tecnico di una metafora musicale, questa è la quintessenza di un'idea ancora di una semplicità infantile, delicata e audace allo stesso tempo. »

Motivi

« Si aveva la netta impressione che, in un senso che all'inizio rimaneva piuttosto vago, tutte queste teorie ... dovessero “ricondursi alla stessa cosa”, che “dessero gli stessi risultati”. È stato per esprimere questa intuizione di “parentela” tra le teorie ..., che ho elaborato la nozione di “**motivo**” associato a una varietà algebrica. Con questo termine intendo suggerire che si tratta del “motivo comune” (o della “**ragione** comune”) alla base di questa moltitudine di diversi invarianti ... associati alla varietà...

Queste diverse teorie ... sarebbero come tanti diversi sviluppi tematici diversi, ciascuno nel proprio “tempo”, “chiave” e “modo” (“maggiore” o “minore”), dello stesso “motivo di base” ..., che sarebbe allo stesso tempo il più fondamentale, o il più “fine”, di tutte queste diverse “incarnazioni” tematiche... Così, il motivo ... costituirebbe l'invariante ... “ultimo”, “per eccellenza”, di cui tutti gli altri ... verrebbero dedotti, come tanti “incarnazioni” musicali, o “realizzazioni” differenti. »

Un problema di « tema e variazioni »

Sempre nell'ambito di questa metafora, potremmo descrivere la problematica dei motivi come quella di « indovinare » o « ricostruire » il « tema » a partire da un insieme di « variazioni ».

In altre parole, si tratta di svelare l' « **oggetto universale** » da cui scaturiscono le diverse « variazioni », interpretandole come incarnazioni semantiche differenti di una stessa idea astratta di natura « sintattica ».

Così come in musica il tema tipicamente è uno « scheletro strutturale » dalla natura epurata, astratta, essenziale, mentre le variazioni hanno una natura più concreta, « carnale », così in matematica gli oggetti universali vivono ad un livello superiore rispetto a quello delle forme 'concrete' nelle quali gli invarianti si manifestano.

Non è dato sapere se Grothendieck si sia ispirato a Wagner, pioniere dei « *leitmotiv* » (o agli altri compositori che ne hanno fatto uso, come Puccini o Verdi), nel coniare il termine « motivo »; ad ogni modo, il parallelismo con quanto avviene in musica è del tutto pertinente.

La simmetria in musica

L'applicazione dei concetti di « oggetti universali », « topoi utili alla costruzione di ponti » ed « invarianti » è molto naturale anche in campo musicale.

Per questo motivo, ci concentriamo su due forme compositive che hanno trovato il proprio fulgore nel periodo Barocco, comunemente inteso come quello compreso fra il 1600 e il 1750, anno della morte del più grande compositore di tutti i tempi, Johann Sebastian Bach. È proprio con lui che la scrittura musicale polifonica raggiunge il suo apogeo. Parliamo quindi di:

Fuga

Tema e variazioni



La fuga

La fuga è una forma compositiva polifonica – 3 o 4 voci generalmente – basata su un'idea tematica che passa fra le varie voci. È composta da:

- *soggetto*: idea tematica cardine di tutta la composizione;
- *risposta*: l'imitazione del soggetto portato ad un'altra voce;
- *controsoggetto*: la controparte che accompagna il soggetto e la risposta durante lo sviluppo di tutta la fuga, apportando un elemento tematico nuovo;
- *parti libere*, cioè linee melodiche non obbligate, che non devono cioè ripresentarsi nelle stesse forme ritmico-melodiche come invece fanno il soggetto e la risposta.

La struttura della fuga si articola nelle seguenti sezioni:

- ✓ **esposizione**: è la sezione iniziale: ogni voce deve «entrare» con il suo soggetto o la risposta, a distanza regolare e costante;
- ✓ **divertimenti**: sezioni di transizione costituite in parte da materiale ritmico o melodico del soggetto, ma che sono libere da vincoli;
- ✓ **repliche**: ulteriori enunciazioni di soggetto e risposte;
- ✓ **stretto**: parte conclusiva, in cui le enunciazioni del soggetto e delle risposte si accavallano fra di loro ad un ritmo più serrato.



Die Kunst der Fuge (L'Arte della Fuga), BWV 1080

Die Kunst der Fuge è una delle opere più monumentali di J. S. Bach, rimasta incompiuta, a causa della morte del compositore.

Consta di **15 fughe** (chiamati contrappunti) e **4 canoni** sullo stesso soggetto, contenenti tutti gli espedienti intellettuali possibili, fughe doppie e triple, procedimenti di aumentazione e diminuzione, inversione delle tessiture, tutto a partire dal tema più semplice, che viene esposto all'inizio del Primo Contrappunto.

Le voci sono quattro e non vi è alcuna destinazione vocale o strumentale scritta dal compositore (Quartetto d'archi? Quartetto vocale? Quartetto di fiati?). Per questo motivo l'Arte della Fuga è sempre stata eseguita dalle formazioni più disparate.

L'enigma finale dell'Arte della Fuga risiede nel suo ultimo Contrappunto, il XIV: è una fuga con tre soggetti. Dopo 239 battute, arrivato al punto in cui i tre temi si combinano, il manoscritto si interrompe e appare l'annotazione del figlio Carl Philipp Emanuel:

« In questa fuga, dove il nome B.A.C.H. è introdotto come controsoggetto, il compositore morì ».

Possiamo congetturare con ragionevole sicurezza che la morte abbia impedito a Bach di terminare il suo progetto, quello di scrivere una fuga con quattro temi invertibili nota per nota in tutte le parti.

Il contrappunto XII: un miracolo di simmetria

Le due fughe che costituiscono il Contrappunto XII, Rectus e Inversus, possono essere invertite nota per nota dall'inizio alla fine. Per rendere più agevole il confronto, Bach scrive l'Inversus sotto il Rectus, così che si possa vedere la loro relazione come in uno specchio. Il Contrappunto è quindi totalmente rigirato al punto che il Basso diventa Soprano, il Tenore Contralto e viceversa.



Il Tema e Variazioni

È una forma compositiva che prevede che un'idea musicale (Tema) subisca modifiche (Variazioni) più o meno profonde. Le modifiche possono riguardare qualunque aspetto, la melodia, l'armonia, l'articolazione del contrappunto, il ritmo, la dinamica ecc.

Poiché la variazione è un procedimento così generale, nelle varie epoche ha subito profonde mutazioni.

Nel periodo barocco spesso le variazioni servono per esplorare le possibilità tecniche e virtuosistiche dello o degli strumenti coinvolti mediante l'ornamentazione della melodia.

Dal periodo classico in poi, la variazione diventa un mezzo per far evolvere in maniera drammaturgica il discorso musicale, mentre nel Novecento è una esplorazione delle risorse armoniche del Tema.

L'esempio più illustre: le Variazioni Goldberg

Le Variazioni Goldberg per clavicembalo BWV 988 sono un'opera di J. S. Bach consistente in un'Aria con 30 Variazioni e la stessa Aria da capo, in coda al pezzo. Il periodo di composizione è compreso fra il 1741 e il 1745.

Le variazioni sono disposte secondo un'architettura modulare, e ogni modulo segue uno schema matematico e simmetrico.

L'aria è una sarabanda, antica danza di andamento non veloce.

Le variazioni sono ordinate a gruppi di tre:

- ❖ Una **danza** (giga, passepied, siciliana, sarabanda, ecc.)
- ❖ Una **toccata** (più virtuosistica)
- ❖ Un **canone** (tranne la variazione 30, che è un *Quodlibet*, ossia la sovrapposizione al basso dell'Aria di due canti popolari).

Proposte di ascolto:

Tema e Variazione 1 per cembalo solo

Variazione 2 (trascritta per trio d'archi): unica eccezione al ciclo ternario dell'opera, non è una toccata

Variazione 18 (trascritta per trio d'archi): canone alla sesta

Variazione 19 (trascritta per trio d'archi): danza in 3/8

Aria mit verschiedenen Veränderungen

BWV 988

Aria



7

13

18

23

28

Guida all'ascolto della Seconda parte del Concerto: Tipologie di Tema e Variazioni

Arcangelo Corelli: Sonata op. 2 n. 12 – Ciaccona

Si tratta di un caso di variazione molto diffuso in epoca barocca, ovvero quella su un *basso ostinato*. Il basso presenta un breve disegno musicale ripetuto ad oltranza senza modifiche, mentre i due violini hanno il compito di variare melodicamente. La Ciaccona è una danza cinquecentesca di origini spagnole su un basso sincopato in tempo ternario.

Giuseppe Sammartini: Trio sonata in la maggiore, in due movimenti

Pratica comune dell'epoca barocca e preclassica era quella di sfruttare la ripetizione di una sezione per aggiungere « *ornamenti* » o « *diminuzioni* »; in questo caso, tale procedimento di variazione rende la musica più brillante e godibile, perché evita la noia che può insorgere ascoltando una stessa idea musicale riproposta due volte uguale.

Antonio Vivaldi: Trio sonata « La Follia »

20 Variazioni su uno dei temi più noti del periodo barocco, La Follia, di origine portoghese, antichissimo.

Basso di Ciaccona, Arcangelo Corelli



Tema de «La Follia», Antonio Vivaldi

Antonio Vivaldi (1678 - 1741)

1. Adagio



« Solo il Maestro dell'Orchestra sente il Concerto nella sua interezza, come pure in ognuna delle sue voci, in ogni modulazione e in ogni battuta di ogni voce. Ma per poco che tendiamo l'orecchio, noi musicisti-cantori possiamo talvolta cogliere al volo gli sparsi frammenti di uno splendore che ci trascende e al quale, ciò nonostante, misteriosamente e insostituibilmente, partecipiamo. »

A. Grothendieck - La Clef des Songes



Grazie per la vostra partecipazione!